

# Zur Klassifikation musikalischer Motive unabhängig vom Takt

Hans Straub  
Herbst 1998

## Abstract

Für einen Algorithmus zur modultheoretischen Klassifikation musikalischer Motive, den ich in meiner Diplomarbeit für Motive im 12er-Takt beschrieben habe, werden verschiedene Möglichkeiten zur Erweiterung auf beliebige Takte präsentiert. Anhand von verschiedenen Variationen eines Beispiels wird untersucht, inwieweit die Klassifikation vom aktuellen Takt unabhängig ist.

## Einführung

### Ausgangslage

In meiner Diplomarbeit [1] habe ich die modultheoretische Klassifikation musikalischer Motive behandelt (basierend auf einer Theorie von G. Mazzola [2]), unter Betonung des algorithmischen Aspektes. Als Anwendungsbeispiele habe ich Teile ausgewählter musikalischer Werke analysiert und versucht, Stileigenschaften zu ermitteln.

### Problemstellung

Eine wesentliche Schwäche des implementierten Algorithmus ist dessen Abhängigkeit vom Takt, in dem ein Musikstück notiert ist. Will man breitere und aussagekräftigere Stilanalysen durchführen, ist eine Vergleichsmöglichkeit für in verschiedenen Takten notierte Motive unerlässlich.

### Lösungsansätze

Es bieten sich hierzu 2 Wege an, die ich beide ein Stück weit verfolge.

- Die Takteinteilung bei Bedarf verfeinern; Motive, die in verschiedenen Takten notiert sind, können immer in einer beide Taktmasse enthaltenden Unterteilung verglichen werden. Es ist dann die Frage zu beantworten, wie weit die Klassifizierung von der gewählten Unterteilung abhängt. Wünschenswert wäre natürlich, dass die Eigenschaft "2 Motive sind isomorph" von der Taktunterteilung unabhängig wäre; dies ist unter bestimmten Bedingungen der Fall, jedoch, wie ich zeige, nicht immer.
- Oder man verzichtet ganz auf den Takt und klassifiziert Motive mit unbegrenzten Zeit - Koordinaten (diese Variante werde ich zuerst behandeln). Es gibt dann natürlich unendlich viele Motive und ebenso viele Isomorphieklassen; die Anzahl musikalisch sinnvoller Motive ist jedoch weiterhin beschränkt. Es stellt sich jedoch ein analoges Problem bei der Frage, in welcher kleinsten Zeiteinheit man ein Musikstück notieren will: die Wahl einer anderen Zeiteinheit wirkt sich aus wie eine Vergrößerung oder Verkleinerung in Zeitachse - eine nicht-invertierbare Transformation, die, wie ich zeige, die Isomorphie von Motiven nicht bewahrt.

### Literatur

[1] Hans Straub, Beiträge zur modultheoretischen Klassifikation musikalischer Motive, Diplomarbeit 1989 ETH Zürich.

[2] Guerino Mazzola, Geometrie der Töne, Elemente der mathematischen Musiktheorie, Birkhäuser, Basel 1990.

## 1. Klassifizierung ohne Takt

Zur Terminologie sowie einer ausführlicheren Herleitung siehe [1].

Der Einfachheit halber werde ich auch die Tonhöhen-Koordinate nicht-modular betrachten; so erhalten wir als Raum  $Z \times Z$ .

Affine Transformationen auf  $Z \times Z$  sind Zusammensetzungen aus Translationen und linearen Transformationen ( $GL(2,Z)$ ).

Elemente von  $GL(2,Z)$  sind darstellbar als Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten und invertierbarer Determinante. Achtung: invertierbare Elemente in  $Z$  (und somit einzige Möglichkeiten für Determinanten) sind 1 und -1.

Analog zur Herleitung für  $Z_{12} \times Z_{12}$  (siehe [1]) erhalten wir als Generatoren für  $GL(2,Z)$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Dilatation bzw. Krebs})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Transvektionen oder Scherungen})$$

### 1.1. Zur Klassifizierung der 2- und 3-elementigen Motive in $Z \times Z$

Die Klassifikation der zweielementigen Motive (Teilmengen) in  $Z \times Z$  geht genau gleich wie in  $Z_{12} \times Z_{12}$  durch Erstellen einer "Normalform": mit einer Translation bringt man ein Element in den Nullpunkt, und mit passend ausgewählten Scherungen und ggf. Parametertausch das andere Element auf die X - Achse. Die Bestimmung der Isomorphieklasse s Motivs ist somit zurückgeführt auf die Bestimmung des Wertes der verbleibenden nichtverschwindenden Koordinate, und dieser ist (siehe [1]) der g.g.T. der Koordinatendifferenzen des ursprünglichen Motivs; er ist bestimmt bis auf invertierbare Elemente, was in  $Z$  aber nur bedeutet, dass das Vorzeichen keine Rolle spielt.

Die Herleitung der Invarianten "Volumen" und "Klassengewicht" - bestimmt bis auf invertierbare Elemente - funktioniert für  $Z \times Z$  genau gleich wie für  $Z_{12} \times Z_{12}$ .

Die Isomorphieklasse eines 3-elementigen Motivs ist in  $Z_{12} \times Z_{12}$  durch Volumen und Klassengewicht eindeutig bestimmt, was man durch systematisches Durchprobieren aller Motive herausfinden kann. Im unendlichen Raum  $Z \times Z$  funktioniert dieses Verfahren leider nicht.

#### **Satz**

Seien  $m_1$  und  $m_2$  3-elementige Motive in  $Z \times Z$ . Dann gilt:

- Ist das Volumen der Motive 0, dann sind die Motive genau dann isomorph, wenn Volumen und Klassengewicht übereinstimmen.
- Für Volumen  $\neq 0$  gilt: Volumen und Klassengewicht sind **nicht** ausreichend zur Bestimmung der Isomorphieklasse.

klatak2.wps

Beweis

a)

Ist das Volumen eines Motivs 0, so liegen die Elemente des Motivs in einer Geraden (man beachte: dies gilt in  $Z$ , jedoch nicht in  $Z_{12}$ ). Das bedeutet: wenn wir eine (x-beliebige) 2-elementige Teilmenge herauspicken und mit einer (nach dem oben skizzierten Verfahren konstruierten) affinen Transformation in die Normalform  $\{ (0,0), (n,0) \}$  bringen, so bringt diese Transformation das verbleibende dritte Element in die Form  $(m,0)$ .

Behauptung:

Jedes Motiv kann in die Form  $\{ (0,0), (m,0), (n,0) \}$  mit  $0 < n-m \leq m < n$  gebracht werden.

Beweis:

Betrachten wir ein Motiv in der Form  $\{ (0,0), (m,0), (n,0) \}$ . Durch eine Translation kann man erreichen, dass beide nichtverschwindenden Koordinaten positiv sind. Es gelte  $0 < m < n$  (durch entsprechende Anordnung der Elemente zu erreichen). Das Motiv hat eine der folgenden Formen:

$$\begin{array}{ll}
* \dots * \dots * & (n-m < m) \\
* \dots * \dots * & (n-m = m) \\
* \dots * \dots * & (n-m > m)
\end{array}$$

Die ersten beiden Fälle erfüllen die Bedingung schon. Falls der letzte Fall zutrifft, wende man eine Zeitumkehr an, gefolgt von einer Translation um  $n$ . Das resultierende Motiv ist:

$$\{ (0,0), (n-m,0), (n,0) \}$$

und erfüllt die Bedingung.

Die Klassengewichte dieses Motivs in aufsteigender Reihenfolge sind:  $n-m$ ,  $m$  und  $n$ . Jedes Motiv mit Volumen 0 und denselben Klassengewichten wird mit dem obigen Verfahren in dieselbe Normalform gebracht  $\rightarrow$  Q.E.D.

b)

Wir nehmen an (bzw. wir hoffen!), dass Volumen und Klassengewicht die Isomorphieklasse eines Motivs in  $Z \times Z$  eindeutig bestimmen, und präsentieren ein Gegenbeispiel.

Sei

$$m_1 := \{ (0,4), (0,2), (9,0) \}, \quad m_2 := \{ (2,0), (1,0), (0,18) \}$$

Beide Motive haben Volumen 18 und die Klassengewichte 1,1 und 2. Gesucht ist eine affine invertierbare Transformation, welche  $m_1$  in  $m_2$  überführt!

Eine solche Transformation hat bekanntlich die Form

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + u \\ cx + dy + v \end{pmatrix} \quad a, b, c, d, u, v \in Z, a * d - b * c = \pm 1$$

klatak2.wps

Wie wirkt die Transformation  $\Psi$  auf die einzelnen Elemente? Theoretisch können die Elemente von  $m_1$  auf  $3! = 6$  Arten auf die von  $m_2$  abgebildet werden; da jedoch die Klassengewichte erhalten bleiben müssen, folgt zwingend, dass die Teilmenge  $\{ (0,4), (0,2) \}$  in  $\{ (2,0), (0,18) \}$  überzugehen hat. Es ergeben sich somit 2 Möglichkeiten für die Wirkung von  $\Psi$ :

1.  $(0,4) \rightarrow (2,0), \quad (0,2) \rightarrow (0,18), \quad (9,0) \rightarrow (1,0)$
2.  $(0,4) \rightarrow (0,18), \quad (0,2) \rightarrow (2,0), \quad (9,0) \rightarrow (1,0)$

Diese 3 Zuordnungen in die Formel oben eingesetzt ergibt 6 Gleichungen, die wir nun nach den Koeffizienten von  $\Psi$  (6 Unbekannten) auflösen.

#### Fall 1

Die Gleichungen sind:

- (1)  $4b + u = 2$
- (2)  $4d + v = 0$
- (3)  $2b + u = 0$
- (4)  $2d + v = 18$
- (5)  $9a + u = 1$
- (6)  $9c + v = 0$

aus (2) folgt:  $v = -4d$ . Eingesetzt in (4) ergibt:  $2d - 4d = 18 \rightarrow d = -9, v = 36$

aus (3) folgt:  $u = -2b$ . Eingesetzt in (1) ergibt:  $4b - 2b = 2 \rightarrow b = 1, u = -2$

Eingesetzt in (6) ergibt:  $9c + 36 = 0 \rightarrow c = -4$

Eingesetzt in (5) ergibt:  $9a - 2 = 1 \rightarrow \mathbf{3a = 1}$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, aber keine in  $\mathbb{Z}$ .

#### Fall 2

Die Gleichungen sind:

- (1)  $4b + u = 0$
- (2)  $4d + v = 18$
- (3)  $2b + u = 2$
- (4)  $2d + v = 0$
- (5)  $9a + u = 1$
- (6)  $9c + v = 0$

Auch dieses Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, die jedoch ebenfalls nicht ganzzahlig ist.

Somit haben wir bewiesen, dass Übereinstimmung von Volumen und Klassengewicht keine hinreichende Bedingung für die Isomorphie dreielementiger Motive in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  darstellt. Man beachte, dass es sehr wohl eine notwendige Bedingung ist (was aus der Invarianz folgt).

## 1.2. Wahl der Unterteilung bzw. Zeit-Dilatationen

In meiner Diplomarbeit stiess ich bei einer der Melodieanalysen auf folgendes Problem: Das Stück war im 3/4-Takt notiert; die Unterteilung eines Taktes in 12 kleinste Einheiten ergab also als kleinste Notenlänge das Sechzehntel. Die kleinste vorkommende Note war aber das Zweiunddreissigstel - allerdings nur an einer einzigen Stelle im Stück vorkommend. Ausserdem fanden sich an zwei anderen Stellen Sechzehntel-Triolen ("Vierundzwanzigstel"); der überwiegende Teil konnte jedoch in Sechzehnteln beschrieben werden, so dass eine Analyse mit dem auf Motive im 12er-Takt beschränkten Algorithmus vertretbar war.

Wenn wir das Ganze nun in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  betrachten, kann man Motive in beliebigen Takten vergleichen. Man könnte also alle Zeitkoordinaten in kleineren Einheiten (im konkreten Falle Zweiundsiebszigstel) darstellen. Die sich dann sofort stellende Frage ist jedoch: hat das einen Einfluss auf die Klassifikation? Genauer gesagt:

Ist die Bestimmung der Isomorphie zweier Motive unabhängig von der Einheit, in der ihre Zeitkoordinaten notiert sind?

Diese Frage werde ich im folgenden untersuchen.

Eine Verfeinerung der Unterteilung der Zeitachse um den Faktor  $n$  bewirkt eine Multiplizierung der Koordinatenwerte um  $n$ , also eine Zeit-Dilatation, die in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dargestellt wird durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun der (ernüchternde)

### **Satz**

- Isomorphe Motive in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  gehen durch Zeit-Dilatation **nicht** garantiert in isomorphe Motive über.
- Nicht isomorphe Motive in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  gehen durch Zeit-Dilatation **nicht** garantiert in nicht-isomorphe Motive über.

### Beweis

Ich arbeite wieder mit Gegenbeispielen.

a) Sei

$$m_1 := \{ (0,4), (0,2), (6,0) \}, \quad m_2 := \{ (4,0), (2,0), (0,6) \}$$

$m_2$  geht aus  $m_1$  durch Parametertausch hervor, die beiden Motive sind also isomorph. Das Volumen beider Motive ist 12, die Klassengewichte sind 2, 2 und 2. Eine Zeit-Dilatation um den Faktor 3 liefert

$$m_1' := \{ (0,4), (0,2), (18,0) \}, m_2' := \{ (12,0), (6,0), (0,6) \}$$

$m_1'$  und  $m_2'$  haben dasselbe Volumen 36, doch die Klassengewichte sind verschieden:  
 $m_1'$  hat Klassengewichte 2, 2, 2,  $m_2'$  hingegen 6,6,6! Somit können die Motive nicht isomorph sein.

b) Sei

$$n_1' := \{ (0,4), (0,2), (18,0) \}, n_2' := \{ (4,0), (2,0), (0,18) \}$$

$n_1'$  ist das Motiv  $m_1'$  des vorherigen Abschnitt, das ich diesmal durch Zeit-Dilatation um den Faktor 2 aus dem Motiv  $n_1 = \{ (0,4), (0,2), (9,0) \}$  hervorgehen lasse.  $n_2'$  geht durch Parametertausch aus  $n_1'$  hervor, ist also isomorph zu letzterem. Da alle Koordinaten ganzzahlig sind, ist auch  $n_2'$  das Bild eines Motivs unter Zeit-Dilatation um den Faktor 2. Wir erhalten:

$$n_1 := \{ (0,4), (0,2), (9,0) \}, \quad n_2 := \{ (2,0), (1,0), (0,18) \}$$

Das Volumen ist in beiden Fällen 18, die Klassengewichte in beiden Fällen 1,1 und 2. Dies sind jedoch genau die Motive aus dem vorherigen Kapitel, von denen wir schon wissen, dass sie nicht isomorph sind. Somit haben wir 2 nicht-isomorphe Motive, deren Transformierten unter einer bestimmten Zeit-Dilatation isomorph sind, was die Aussage b) beweist.

## 2. Klassifizierung in verschiedenen Takten

In diesem Kapitel ist die Grundmenge für den Tonraum  $Z_n \times Z_{12}$ , als  $Z$ -Modul bzw. abelsche Gruppe betrachtet (wie in [1] hergeleitet). Die Zahl  $n$  bezeichnet dabei die Anzahl kleinste Einheiten pro Takt. Die uns interessierenden "affinen Transformationen" sind hier Zusammensetzungen aus Translationen und  $Z$ -Modul-Automorphismen.

### 2.1. Zur Klassifizierung von Motiven in beliebigen $Z$ -Moduln

Die in [1] vorgestellten Invarianten funktionieren alle grundsätzlich auch für beliebige Moduln. Ich werde insbesondere die Invariante "RK" verwenden, auf die ich im folgenden etwas näher eingehe.

Sei  $K := \{v_0, v_1, \dots, v_t\}$  ein  $(t+1)$ -elementiges Motiv, also eine  $(t+1)$ -elementige Teilmenge einer endlichen Gruppe  $G$ . Es ist dann  $RK := \langle v_1 - v_0, \dots, v_t - v_0 \rangle$ , die von den Elementen  $v_i - v_0$  erzeugte Untergruppe von  $G$ . Die Isomorphieklasse von  $RK$  ist eine Invariante unter affinen Abbildungen (Translationen lassen  $RK$  invariant, und Automorphismen führen  $RK$  in eine isomorphe Untergruppe über.)

Bei zweielementigen Motiven wird die Untergruppe von einem einzigen Element erzeugt, ist somit eine zyklische Gruppe der Ordnung  $o(v_1 - v_0)$ . Da zyklische Gruppen genau dann isomorph sind, wenn ihre Ordnungen übereinstimmen, ist die Zahl  $o(v_1 - v_0)$  eine Invariante der Isomorphieklasse des Motivs.

klatak2.wps

Im Falle  $G = Z_{12} \times Z_{12}$  ist durch diese Grösse die Isomorphieklasse eines zweielementigen Motivs vollständig bestimmt (was für beliebige  $G$  allerdings nicht unbedingt gilt). Die Zahl verhält sich ‘komplementär’ zur in [1] hergeleiteten Klassenberechnung: Motive der Klasse 1 haben Ordnung 12, die der Klasse 2 Ordnung 6, Klasse 3 Ordnung 4, Klasse 4 Ordnung 3 und Klasse 6 Ordnung 2.

## 2.2. Szenario bei Verfeinerung der Takt-Unterteilung

Gegeben sei nun:

- ein Tonraum zu einer bestimmten Taktunterteilung:  $Z_n \times Z_{12}$
- und eine Verfeinerung desselben:  $Z_{kn} \times Z_{12}$ .

Die Verfeinerungsabbildung ist:

$$\alpha: Z_n \times Z_{12} \rightarrow Z_{kn} \times Z_{12}, (x+nZ, y+12Z) \rightarrow (kx+knZ, y+12Z).$$

$m_1$  und  $m_2$  seien Teilmengen in  $Z_n \times Z_{12}$ .

Die zu beantwortenden Fragen lauten: Wenn  $m_1$  und  $m_2$  isomorph (bzw. nicht isomorph) sind, sind dann auch  $\alpha(m_1)$  und  $\alpha(m_2)$  isomorph (bzw. nicht isomorph)? Genauer:

- Falls eine affine Abbildung  $\phi: Z_n \times Z_{12} \rightarrow Z_n \times Z_{12}$  existiert, so dass  $\phi(m_1) = m_2$ , existiert dann eine affine Abbildung  $\psi: Z_{kn} \times Z_{12} \rightarrow Z_{kn} \times Z_{12}$ , so dass  $\psi(\alpha(m_1)) = \alpha(m_2)$ ?
- Falls eine affine Abbildung  $\psi: Z_{kn} \times Z_{12} \rightarrow Z_{kn} \times Z_{12}$  existiert,  $\psi(\alpha(m_1)) = \alpha(m_2)$ , existiert dann eine affine Abbildung  $\phi: Z_n \times Z_{12} \rightarrow Z_n \times Z_{12}$ , so dass  $\phi(m_1) = m_2$ ?

$$\begin{array}{ccc} Z_n \times Z_{12} & \rightarrow & Z_n \times Z_{12} \\ & \phi? & \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ Z_{kn} \times Z_{12} & \rightarrow & Z_{kn} \times Z_{12} \\ & \psi? & \end{array}$$

Die Aufgabe zerfällt in je eine für jede  $p$ -Komponente der betroffenen Gruppen.

Ich werde zunächst - anhand eines Gegenbeispiels für a) - zeigen, dass dies nicht immer gilt, und anschliessend ein paar Grundsatzüberlegungen anstellen zu der Frage, unter welchen Bedingungen dies möglich sein kann.

## 2.3. Gegenbeispiel

Sei  $n := 12$  und  $k := 2$ . Wir betrachten also den Fall, wo die Unterteilung eines Taktes von 12 auf 24 verdoppelt wird. In der  $p$ -Komponente zur Primzahl  $p = 2$  sieht das folgendermassen aus:

$$Z_4 \times Z_4 \quad \rightarrow \quad Z_4 \times Z_4$$

klatak2.wps

$$\begin{array}{ccc}
 & \phi? & \\
 \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\
 \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\psi?} & \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4
 \end{array}$$

Hierbei ist die Abbildung  $\alpha$  (ich verwende der Einfachheit halber dieselben Bezeichnungen) definiert als

$$\alpha: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4, (x+4\mathbb{Z}, y+4\mathbb{Z}) \rightarrow (2x+8\mathbb{Z}, y+4\mathbb{Z}).$$

Dieselben Strukturen erhält man übrigens bei Taktverfeinerung von 4 nach 8; beides Situationen, die in der Praxis ziemlich häufig vorkommen.

Sei nun

$$m_1 := \{ (4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (4\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}), (2+4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \}, \quad m_2 := \{ (4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (1+4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}) \}$$

Eine Abbildung  $\phi$ , welche  $m_1$  in  $m_2$  überführt, ist wieder der Parametertausch. Dann ist

$$\begin{aligned}
 m_1' & := \alpha(m_1) = \{ (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (8\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}), (4+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \} \\
 m_2' & := \alpha(m_2) = \{ (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (2+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (8\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}) \}
 \end{aligned}$$

Die (unter  $\phi$  wie unter  $\alpha$  invariant bleibenden) Ordnungen der zweielementigen Teilmengen sind 4, 4 und 2. Aus der Invarianz der Ordnungen ergeben sich deshalb wie in Kapitel 1.1 Bedingungen für die Wirkung einer allfälligen affinen Abbildung  $\psi$ , welche  $m_1'$  in  $m_2'$  überführt: Da die Teilmenge der Ordnung 2  $\{ (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (4+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \}$  überzugehen hat in  $\{ (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (8\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}) \}$ , haben wir die folgenden 2 Möglichkeiten:

1.  $(8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \rightarrow (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), \quad (4+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \rightarrow (8\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}), \quad (8\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}) \rightarrow (2+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$
2.  $(8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \rightarrow (8\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}), \quad (4+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \rightarrow (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), \quad (8\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}) \rightarrow (2+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$

### Fall 1

$(8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}) \rightarrow (8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$  bedeutet, dass die Abbildung  $\psi$  ein Automorphismus (d.h. ohne Translationskomponente) ist.

Die Menge  $\{ (1+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}), (8\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}) \}$  ist eine Basis des Moduls; die Abbildung  $\psi$  wird vollständig bestimmt durch die Abbilder auf der Basis.

Da mit  $(8\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}) \rightarrow (2+8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$  das Abbild eines Basiselements bereits gegeben ist, ist nur noch das Abbild des zweiten Basiselements zu bestimmen. Sei also

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1+8\mathbb{Z} \\ 4\mathbb{Z} \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} u+8\mathbb{Z} \\ v+4\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad u, v \in \mathbb{Z}$$

Einsetzen der letzten verbleibenden Bedingung ergibt:

klastak2.wps

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 4+8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) = 4\psi\left(\begin{pmatrix} 1+8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) = 4\begin{pmatrix} u+8Z \\ v+4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u+8Z \\ 4v+4Z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4u+8Z \\ 4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8Z \\ 2+4Z \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort, dass diese Gleichung in der zweiten Koordinate nicht erfüllt werden kann.

### Fall 2

Die gesuchte affine Abbildung habe die Form

$$\psi = \exp(\vec{v}) \circ \kappa$$

wobei  $\kappa$  ein Automorphismus ist und  $\exp(v)$  die Translation um den Vektor  $v$  bezeichnet. Dann gilt:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) = \kappa\left(\begin{pmatrix} 8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) + \vec{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 8Z \\ 2+4Z \end{pmatrix}$$

was den Vektor  $v$  bestimmt.

Für die Wirkung des Automorphismus  $\kappa$  auf die Elemente von  $m_1'$  gilt dann

$$\begin{aligned} (8Z, 4Z) &\rightarrow (8Z, 4Z) \\ (4+8Z, 4Z) &\rightarrow (8Z, -2+4Z) \equiv (8Z, 2+4Z) \\ (8Z, 1+4Z) &\rightarrow (2+8Z, -2+4Z) \equiv (2+8Z, 2+4Z) \end{aligned}$$

Wie in Fall 1 ist die Abbildung  $\kappa$  vollständig bestimmt durch ihre Abbilder auf der Basis des Moduls. Wenn wir nun setzen

$$\kappa\left(\begin{pmatrix} 1+8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} u+8Z \\ v+4Z \end{pmatrix} \quad u, v \in Z$$

dann ergibt Einsetzen der letzten verbleibenden Bedingung:

$$\kappa\left(\begin{pmatrix} 4+8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) = 4\kappa\left(\begin{pmatrix} 1+8Z \\ 4Z \end{pmatrix}\right) = 4\begin{pmatrix} u+8Z \\ v+4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u+8Z \\ 4v+4Z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4u+8Z \\ 4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8Z \\ 2+4Z \end{pmatrix}$$

und auch diese Gleichung hat keine Lösung.

## 2.4. Ein paar Grundsatzüberlegungen

Das Szenario sei wie in Kapitel 2.2 beschrieben. Für die von den Motiven erzeugten Untergruppen gilt dann:

$$\begin{aligned} R(\phi(m_i)) &= \phi(R(m_i)) \cong R(m_i) && \text{falls } \phi \text{ existiert} \\ R(\psi(\alpha(m_i))) &= \psi(R(\alpha(m_i))) \cong R(\alpha(m_i)) && \text{falls } \psi \text{ existiert} \\ R(\alpha(m_i)) &= \alpha(R(m_i)) \cong R(m_i) \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\alpha$  ist ein injektiver Homomorphismus. Auf  $\text{Bild}(\alpha)$  existiert also eine Inverse  $\alpha^{-1}$ ; insbesondere ist  $\alpha^{-1}$  ein Isomorphismus von  $R(\alpha(m_i))$  nach  $R(m_i)$ .

**Satz**

- a) Wenn alle  $p$ -Komponenten von  $Z_{kn} \times Z_{12}$ , welche von der Taktverfeinerungsabbildung  $\alpha$  betroffen sind, die Form  $(Z_{p^q})^t$  haben, dann gehen isomorphe Motive von  $Z_n \times Z_{12}$  unter der Abbildung  $\alpha$  in isomorphe Motive von  $Z_{kn} \times Z_{12}$  über.
  - b) Wenn alle  $p$ -Komponenten von  $Z_n \times Z_{12}$ , welche von der Taktverfeinerungsabbildung  $\alpha$  betroffen sind, die Form  $(Z_{p^q})^t$  haben, dann gehen nicht-isomorphe Motive von  $Z_n \times Z_{12}$  unter der Abbildung  $\alpha$  in nicht-isomorphe Motive von  $Z_{kn} \times Z_{12}$  über.
- Die Abbildung  $\alpha$  betrifft eine  $p$ -Komponente natürlich genau dann, wenn  $p$  ein Teiler von  $k$  ist.

Beweis - 1. Schritt: die Isomorphie-Abbildung ist ein Automorphismus

a) Sei  $\phi: Z_n \times Z_{12} \rightarrow Z_n \times Z_{12}$ ,  $\phi(m_1) = m_2$ .

Wenn  $\phi$  ein Automorphismus ist, ist die Abbildung

$$\alpha \circ \phi \circ \alpha^{-1}: R(\alpha(m_1)) \rightarrow R(\alpha(m_2))$$

ein Isomorphismus von  $R(\alpha(m_1))$  nach  $R(\alpha(m_2))$ .

Nun habe ich in [1] gezeigt:

(\*) Wenn  $F_1$  und  $F_2$  isomorphe Untergruppen von  $(Z_{pk})^t$  sind und  $\phi$  ein Isomorphismus zwischen  $F_1$  und  $F_2$ , dann lässt sich  $\phi$  zu einem Automorphismus von  $(Z_{pk})^t$  erweitern.

Aufgrund von (\*) ist die Abbildung  $\alpha \circ \phi \circ \alpha^{-1}$  zu einem Automorphismus von  $Z_{kn} \times Z_{12}$  erweiterbar. Aufgrund der Konstruktion führt er  $\alpha(m_1)$  in  $\alpha(m_2)$  über, d.h. die Motive sind isomorph.

b) Sei nun  $\psi: Z_{kn} \times Z_{12} \rightarrow Z_{kn} \times Z_{12}$ ,  $\psi(\alpha(m_1)) = \alpha(m_2)$ .

Die analoge Konstruktion zu a) führt dann zu

$$\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha: R(m_1) \rightarrow R(m_2)$$

klatak2.wps

welches ein Isomorphismus von  $R(m_1)$  nach  $R(m_2)$  ist,  $m_1$  in  $m_2$  überführt und wegen (\*) zu einem Automorphismus von  $Z_n \times Z_{12}$  erweiterbar ist. Das heisst: wenn  $\alpha(m_1)$  und  $\alpha(m_2)$  isomorph sind, dann auch  $m_1$  und  $m_2$  : Q.E.D.

2. Schritt: die Isomorphie-Abbildung ist eine Translation

a) Die Abbildung  $\phi$  sei eine Translation um einen Vektor  $v$ :  $\phi = \exp_v$  (zur ‘Exponentialschreibweise’ von Translationen siehe [2]).

Da die Abbildung  $\alpha$  ein Homomorphismus ist, gilt

$$\alpha(\exp_v(x)) = \alpha(x+v) = \alpha(x) + a(v) = \exp_{\alpha(v)}(\alpha(x)) \quad \text{für } x \in Z_n \times Z_{12}$$

Daraus folgt:

$$\alpha(m_2) = \alpha(\exp_v(m_1)) = \exp_{\alpha(v)}(\alpha(m_1)) \quad \rightarrow \text{Q.E.D.}$$

b) Sei  $\psi: Z_{kn} \times Z_{12} \rightarrow Z_{kn} \times Z_{12}$ ,  $\psi(\alpha(m_1)) = \alpha(m_2)$ , wobei  $\psi = \exp_w$  für ein  $w \in Z_{kn} \times Z_{12}$ .

Da sowohl  $\alpha(m_1)$  als auch  $\alpha(m_2)$  in  $\text{Bild}(\alpha)$  liegen, muss auch der Vektor  $w$  in  $\text{Bild}(\alpha)$  liegen ( $w = \exp_w(x) - x$ ); somit existiert  $\alpha^{-1}(w)$  in  $Z_n \times Z_{12}$ , und es gilt

$$m_2 = \alpha^{-1}(\alpha(m_1)+w) = \alpha^{-1}(\alpha(m_1)) + \alpha^{-1}(w) = m_1 + \alpha^{-1}(w) = \exp_{\alpha^{-1}(w)}(m_1)$$

$\rightarrow$  Q.E.D.

Man beachte: Dies gilt sogar für beliebige abelsche Gruppen.

3. Schritt: die Isomorphie-Abbildung ist eine beliebige affine Transformation

Im Falle a) sei  $\phi = \exp_v \circ \gamma$  mit  $\gamma \in \text{Aut}(Z_n \times Z_{12})$  und  $v \in Z_n \times Z_{12}$ .

Im Falle b) sei  $\psi = \exp_w \circ \kappa$  mit  $\kappa \in \text{Aut}(Z_{kn} \times Z_{12})$  und  $w \in Z_{kn} \times Z_{12}$ .

Das Szenario ist also wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} Z_n \times Z_{12} & \rightarrow & Z_n \times Z_{12} & \rightarrow & Z_n \times Z_{12} \\ & & \gamma? & & \exp_v? \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ Z_{kn} \times Z_{12} & \rightarrow & Z_{kn} \times Z_{12} & \rightarrow & Z_{kn} \times Z_{12} \\ & & \kappa? & & \exp_w? \end{array}$$

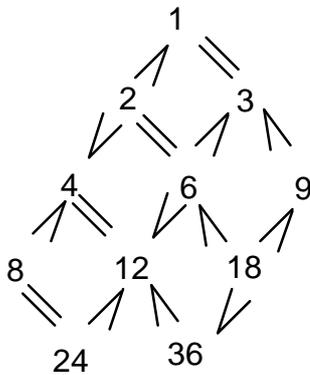
Die Konstruktion der entsprechenden affinen Abbildung erfolgt durch ‘Hintereinanderschalten’ der Konstruktionen gemäss Schritt 1 und 2  $\rightarrow$  Q.E.D.

Die Vorbedingungen zu diesem Satz können mit Hilfe des sogenannten Lemma von Fitting noch etwas verallgemeinert werden; dass er jedoch nicht für Moduln beliebiger Gestalt gilt, haben wir im Kapitel 2.3 mit dem Gegenbeispiel schon gezeigt.

## 2.5. Direkte Folgerungen

Mit dem obigen Satz kann man sofort eine ganze Reihe von Beziehungen zwischen Klassifikationen angeben. Beispielsweise bleibt die Klassifikation von Motiven in Takten der Form  $2^n$  invariant bei einer Verfeinerung nach  $2^{n+1}$ ; bei Verfeinerung von  $3^n$  nach  $3^{n+1}$  wird sie ‘feiner’ (d.h. wir erhalten mehr Isomorphieklassen), bei Verfeinerung von  $3^{n+1}$  nach  $3^{n+2}$  wird sie wieder ‘gröber’, bei direktem Übergang von  $3^n$  nach  $3^{n+1}$  bleibt sie invariant.

Im folgenden Diagramm sind die Beziehungen für die einfachsten Takte aufgezeichnet, wobei ein “>” bedeutet, dass die Klassifikation bei der entsprechenden Verfeinerung gröber wird, ein “<”, dass sie feiner wird, ein “=”, dass sie gleich bleibt.



## Fazit

Die unmittelbaren Resultate der vorgenommenen Untersuchungen lauten:

- 1) (schlechte Nachricht) Die modultheoretische Klassifizierung musikalischer Motive ist *nicht* unabhängig vom Takt.
- 2) (gute Nachricht) Die Beziehungen zwischen den Klassifizierungen in verschiedenen Takten sind in vielen Fällen einfacher Natur, nämlich entweder “gröber” oder “feiner”, wodurch sich die Klassifikationen der entsprechenden Takte sehr gut vergleichen lassen.

Die praktische Anwendbarkeit der ursprünglichen Klassifikations-Theorie ist damit schon deutlich verbessert; noch bleibt indes einiges zu tun.

Zum einen gibt es wichtige Beziehungen, die noch fehlen - insbesondere die zwischen den Klassifikationen im Achter- und Sechzehner-Takt (allgemein zwischen  $2^n$  und  $2^{n+1}$  für  $n > 2$ ).

klatak2.wps

Dann wäre bei den "Vergrößerungen" und "Verfeinerungen" der Grad von Interesse, also welche Isomorphieklassen beim Übergang zu einem höheren Takt zusammenfallen bzw. sich aufspalten.

Untersuchen könnte man auch die Beziehungen zwischen den Klassifizierungen in  $Z_n \times Z_{12}$  und  $Z \times Z$ , allenfalls die zwischen  $Z_n \times Z_{12}$  und  $Z \times Z_{12}$  (Tonhöhe modulo Oktave, Zeit ohne Takt); etwa die Frage, was beim Übergang von taktunabhängiger zu taktgebundener Koordinate ( $Z \rightarrow Z_n$ ) mit isomorphen bzw. nicht isomorphen Motiven passiert.

Die Klassifikation in  $Z \times Z$  an sich scheint noch etwas schlechter abzuschneiden als  $Z_n \times Z_{12}$ , da sie offensichtlich mit der Zeit-Dilatation nicht kompatibel ist. Auch hier wäre jedoch interessant zu wissen, in welchem Ausmass dies zutrifft (für alle Klassen oder nur für manche, für alle Isomorphie-Transformationen oder nicht).

Mir scheint es im Falle  $Z \times Z$  auch sinnvoll, als Alternative eine leicht modifizierte Isomorphiedefinition zu benutzen, welche neben den Automorphismen auch die Dilatationen umfasst; da letztere nicht invertierbar sind, könnte man Motive als "isomorph" definieren, wenn sie durch je eine solche Transformation aus einem gemeinsamen "Vorgänger" hervorgehen. Dies ergäbe wieder eine Äquivalenzrelation, welche von der Wahl der kleinsten Zeiteinheit unabhängig wäre.

Oder aber man könnte gleich zur Klassifikation in  $Q \times Q$  übergehen; das Resultat wäre wieder ein anderes als "Z x Z plus Dilatationen"...

Nicht zu vergessen schliesslich: die *algorithmische* Lösung für die Klassifikation in jedem Takt....