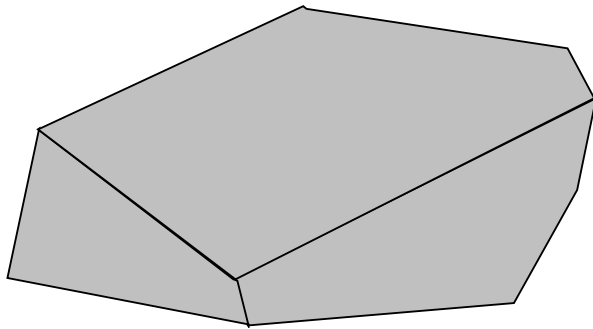


Additum : Der Polyedersatz von Euler

(Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, 1707 - 1783)



Als Polyeder ('Vielflächer') bezeichnet man einen Körper, dessen Oberfläche ausschliesslich aus **ebenen** Teilflächen besteht. Nebst einigen einfachen und regelmässigen Polyedern gibt es unendlich viele verschiedene unregelmässige Polyeder (siehe Abbildung).

Jeder Polyeder besitzt eine bestimmte Anzahl von Eckpunkten (**E**), eine bestimmte Anzahl von Kanten (**K**) und eine bestimmte Anzahl von Flächen (**F**).

Leonhard Euler konnte nun nachweisen, dass zwischen diesen drei Grössen **E**, **K** und **F** für **sämtliche Polyeder** (ohne 'durchgehende Löcher') ein einfacher Zusammenhang besteht.

Bestimme zunächst bei den folgenden einfachen Polyedern die drei Grössen **E**, **K** und **F**.

a) Würfel: **E** = **K** = **F** =

b) Quader: **E** = **K** = **F** =

c) Prisma mit dreieckiger Grundfläche: **E** = **K** = **F** =

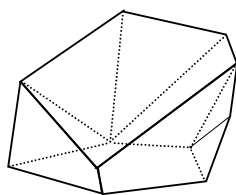
d) Prisma mit siebeneckiger Grundfläche: **E** = **K** = **F** =

e) Pyramide mit rechteckiger Grundfläche: **E** = **K** = **F** =

f) Pyramide mit **n**-eckiger Grundfläche (**n** ≥ 3): **E** = **K** = **F** =

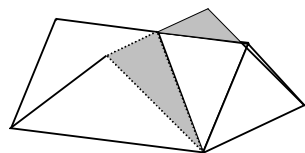
g) Pyramidenstumpf mit fünfeckiger Grundfläche: **E** = **K** = **F** =

h)



E = **K** = **F** =

i)



E =

K =

F =

Berechne nun bei all diesen Polyedern den Wert der Summe

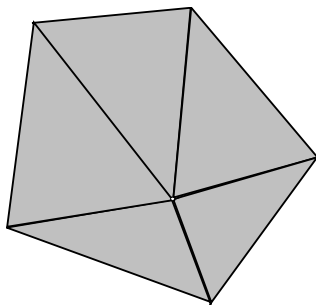
$$\mathbf{S} = \mathbf{E} - \mathbf{K} + \mathbf{F} .$$

Uebungen zum Polyedersatz von Euler

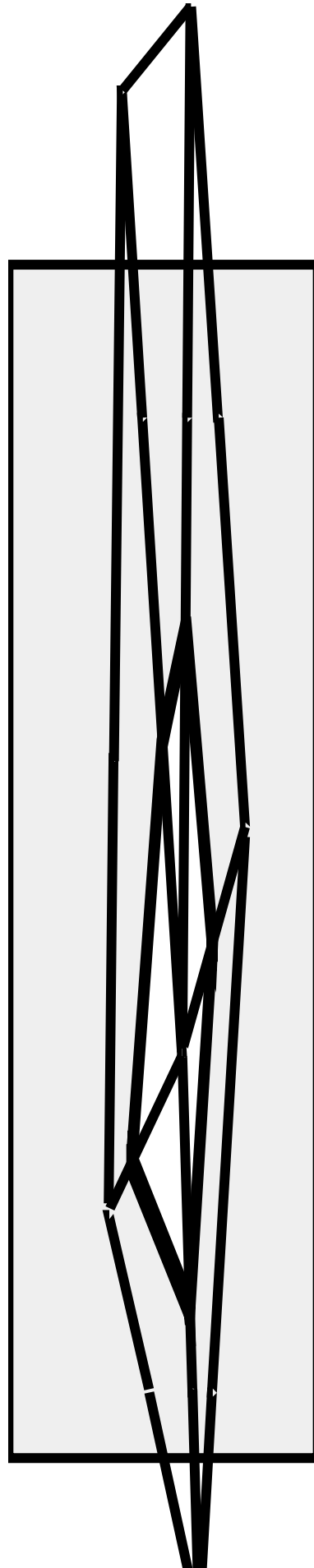
Aufgabe 1 Die Oberfläche eines Polyeders bestehe aus **12 Flächen**, , und dieser Polyeder besitze **20 Eckpunkte**. (Dies ist beispielsweise so beim regulären Dodekaeder 'Zwölfflächer'.)
Wie gross ist die Anzahl der Kanten eines solchen Polyeders?

Aufgabe 2 Zeichne das Kantenmodell eines Polyeders mit nur **7 Eckpunkten**, und zwar so, dass **keine Teilfläche dieses Polyeders mehr als 4 Kanten** aufweist.
Kontrolliere auch daran die Richtigkeit des Polyedersatzes von Euler.

Aufgabe 3 Bei einem bestimmten Polyeder (bei welchem natürlich $E - K + F = 2$ gilt) treffen in einem bestimmten Eckpunkt **n Kanten** aufeinander (beim abgebildeten Beispiel sind dies fünf Kanten).



Nun wird diese Ecke des Polyeders durch eine Ebene abgeschnitten. Dabei entsteht **genau eine** neue (zusätzliche) Fläche am betrachteten Polyeder, und der bisherige Eckpunkt entfällt, es entstehen jedoch an seiner Stelle neue Eckpunkte.



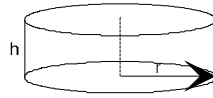
Wie viele Eckpunkte und Kanten besitzt dieser neue Polyeder?

Zeige, dass auch beim so entstandenen 'neuen' Polyeder der Polyedersatz von Euler richtig ist.

Additum: Volumenberechnung des Kegels

Voraussetzungen:

1. Für das Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und mit der Höhe h gilt:

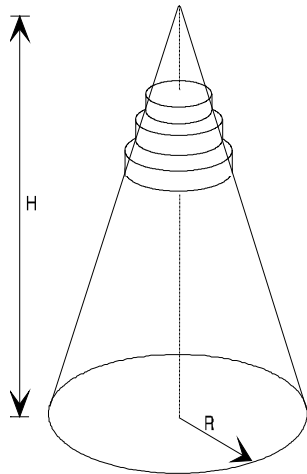


$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

2. Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

Nun nähern wir uns dem gesuchten Kegelvolumen, indem wir einen vorgegebenen Kegel (Grundkreisradius R , Höhe H) 'ersetzen' durch einen Turm von Zylinderscheiben. Dabei seien **all diese Zylinder gleich hoch**, und an ihrer **unteren** Kreisfläche sollen sie mit dem dortigen Radius des Kegels übereinstimmen:



Gehen wir aus von n solchen gleich hohen Zylinderscheiben ($n \in \mathbb{N}$).

Die Höhe h einer jeden solchen Zylinderscheibe beträgt damit bei einer Kegelhöhe der Grösse H :

Nun numerieren wir in Gedanken die n Zylinderscheiben, und zwar von oben nach unten.

Die unterste (also die n -te) Zylinderscheibe trägt dann die Nummer n , und ihr Radius r_n ist gleich dem Grundkreisradius des Kegels, also gleich R .

Die oberste (also die erste) Zylinderscheibe trägt dann die Nummer 1 , und ihr Radius misst:

Die zweite Zylinderscheibe von oben trägt dann die Nummer 2 , und ihr Radius misst:

$$r_2 =$$

Die dritte Zylinderscheibe von oben trägt dann die Nummer 3 , und ihr Radius misst:

$$r_3 =$$

und so weiter.

Der Radius der i -ten Zylinderscheibe misst also:

$$r_i = i \cdot \frac{R}{n} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Damit gilt für das Volumen dieser **i -ten** Zylinderscheibe:

$$V_i = \left(i \cdot \frac{R}{n} \right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{H}{n}$$

Dieses Zylindervolumen V_i wollen wir vorerst noch algebraisch vereinfachen:

$$V_i =$$

Und nun **addieren** wir die Volumina aller n Zylinderscheiben.

Wir erhalten dabei das Volumen $V_{Z(n)}$ eines Zylinderturmes bestehend aus n Scheiben:

$$V_{Z(n)} =$$

Gegen welchen Wert strebt nun dieses Turmvolumen $V_{Z(n)}$ wenn die Anzahl n der Zylinderscheiben **gegen Unendlich** zunimmt?

$$\rightarrow V_{\text{Kegel}} =$$

Nehmen wir zur Konkretisierung einen bestimmten Kegel, und zwar mit dem Grundkreisradius $R = 5 \text{ cm}$ und mit der Höhe $H = 28 \text{ cm}$.

Welches Volumen besitzt dann der entsprechende Zylinderturm, wenn wir uns $n = 6$ Scheiben denken?

$$V_{Z(6)} \cong$$

Welches Volumen besitzt dann der entsprechende Zylinderturm, wenn wir uns $n = 20$ Scheiben denken?

$$V_{Z(20)} \cong$$

Welches Volumen besitzt dann der entsprechende Zylinderturm, wenn wir uns n Scheiben denken?
(Ergänze die Tabelle)

$n = 50$	$V_{Z(50)} \cong$
$n = 100$	$V_{Z(100)} \cong$
$n = 1'000$	$V_{Z(1'000)} \cong$
$n = 100'000$	$V_{Z(100'000)} \cong$