1.1 Geradenspiegelungen

1.1.1 Eigenschaften

Definition 1.1 *Eine* **Abbildung** *der Ebene ist eine Vorschrift, die jedem Punkt P der Ebene einen Bildpunkt P' zuordnet.*

Beispiel 1.1 Zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor k.

Jeder Punkt der Ebene wird abgebildet. Wir zeichnen allerdings häufig nur das Bild von Figuren.

Definition 1.2 *Bei einer* **Geradenspiegelung** *an einer Geraden g gelten für den Bildpunkt P' folgende Bedingungen:*

$$\overline{PP'} \perp g \quad \text{und} \quad \overline{PP'} \text{ wird von } g \text{ halbiert.}$$

Definition 1.3 *Eine* **Kongruenzabbildung** *ist die Hintereinanderausführung mehrererer Geradenspiegelungen. Zwei Figuren heissen* **kongruent**, *wenn sie durch Kongruenzabbildungen auseinander hervorgehen.*

Eigenschaften von Geradenspiegelungen

1. Geradenspiegelungen sind längentreu, winkeltreu und flächentreu.
2. Ist A' Bild von A, so ist A Bild von A', also $(A')' = A$.
3. Punkte auf der Achse bleiben fest. Sie sind **Fixpunkte** der Abbildung
4. Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
5. Geraden senkrecht zur Achse sind **Fixgeraden**. (das gilt nicht für die einzelnen Punkte)
6. Der Umlaufsinn von Dreiecken wird geändert.

1.1.2 Aufgaben

Alle Aufgaben sind mit Zirkel und Lineal zu lösen. Wo in der Aufgabenstellung verlangt, dürfen Entfernungen und Winkel auch mit dem Lineal gemessen werden.

Aufgabe 1.1

a) Gegeben: Achse (0|0),(3|1) und die Gerade g:A(2|3),B(0|1,5)

Gesucht: A',g', B'

b) wie a, allerdings muss B'ohne Zirkel konstruiert werden.

Aufgabe 1.2 Gegeben: Achse (0|0),(3|–1) und die 5 Punkte A(3|2), B(0|4), C(–2|3), D(–3|2) und E(0|1).

Gesucht: die Bildpunkte von A bis E. Benutze möglichst wenig den Zirkel.

Aufgabe 1.3 Gegeben: g:A(0|0),B(4|1) und der Punkt C(2|–2)
Konstruiere die Parallele durch C zu g

Aufgabe 1.4 In dieser Aufgaben dürfen Parallelen mit dem Geodreieck gezeichnet werden.
Gegeben Achse (0|0),(3|–1) und die Geraden
g:A(2|2), B(0|4) und
h durch (0|2) und parallel zu g und
k durch (–2|2) und parallel zur Achse
Gesucht: die Bilder von g, h und k.

Aufgabe 1.5 Gegeben a:(0|0),(3|–1) und die Punkte B(–2|3) und A(2|1)
Konstruiere eine Gerade g durch A und eine Gerade h durch B, so dass a Winkelhalbierende von g und h wird.

Aufgabe 1.6 Konstruiere die Winkelhalbierenden von g(0|0), (4|2) und h:(0|0),(5|–3)

Aufgabe 1.7 Spiegle das Viereck A(0|0) B(5|1) C(6|5) D(0|2) an der Diagonalen AC. Das gibt zwei neue Punkte B'und D'. Überlege Dir: Die Fläche, die ABCD und AD'CB' gemeinsam hat ist ein Drachen (ein Viereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen)

Aufgabe 1.8 Gegeben: die Achse (0|0),(2|1) und die Punkte C(7,5|2,5) und D(5|5).
Konstruiere den Fixkreis durch C und D (ein Fixkreis ist ein Kreis, der durch die Geradenspiegelung auf sich selbst abgebildet wird.

Aufgabe 1.9 Gegeben die Achse a(0|0),(2|2) und die Punkte P(4|3), P'(3|4) (der Spiegelpunkt von P) und der Punkt Q(6|4).
Bestimme den Spiegelpunkt von Q an der Achse a nur mit dem Lineal. (Längenmessung erlaubt.)

Aufgabe 1.10 Gegeben die Gerade w_β(0|0),(3|–1), die Punkte A(0|–2) und W(0|0).
Finde ein Dreieck ABC mit Winkelhalbierender w_β und W auf der Seite AC. Dabei soll die Seite AC 7cm lang sein.. (Längenmessung erlaubt.)

Aufgabe 1.11 Gegeben der Punkt B(–1,5|–2) und die Gerade m_b(00),(0|2).
Finde ein Dreieck ABC, so dass m_b die Mittelsenkrechte auf der Seite b ist und a=5,5cm und c=7cm.. (Längenmessung erlaubt.)

Aufgabe 1.12 Gegeben sind die Geraden wγ(0|0),(2|0) und m_a(0|0),(4|3), der Punkt M(2,5|1) und der Kreis k(M,r=3cm). Finde ein Dreieck ABC mit Winkelhalbierender wγ und Mittelsenkrechter m_a, so dass B auf dem Kreis k liegt und der Winkel α=30 Grad beträgt. (Längenmessung und Winkelmessung erlaubt.)

Aufgabe 1.13 Gegeben sind die Geraden m_b(0|0),(2|1) und g(–4|–2),(–2|1) und der Punkt M(2,5|–1,5) mit dem Kreis k(M,r=1,5cm).

Gesucht ist ein Dreieck ABC, so dass C auf g liegt und so dass die Strecke AB den Kreis k berührt.

1.1.3 Reflexion

Aufgabe 1.14 Gegeben: die Achse (0|0),(2|0) und die Punkte A(–3|4) und B((5|2). Finde den kürzesten Weg von A zur Achse nach B.

Aufgabe 1.15 Ein Lichtstrahl von A(–4|2) aus wird an g(0|0),(5|–1) und h(0|–1),(4|1) reflektiert und geht schliesslich durch B(6|4). Konstruiere den Weg des Lichtstrahles.

Aufgabe 1.16 Gegeben: Ein Billardtisch mit den Ecken (±5|±3). Die Seiten werden, wie im Rechteck üblich, mit a, b, c und d bezeichnet.

a) Die Kugel in A(–3,5|2) soll via die Banden a,b,c die Kugel B(3|1) treffen.

b) Dasselbe über die Banden d,b,c

c) über d,b,c,d

Aufgabe 1.17 Gegeben: Parallele Spiegel a(–2|0),(–2|1) und b(2|0), A(–1|5) und B(0|15). Finde den Weg eines Lichtstrahles von A nach B über a) a,b,a b)a,b,a,b

Aufgabe 1.18 Gegeben: Spiegel a(–3|0) (0|0,5) und b(–3|0)(0|–1), A(3|0,5) und B(0|0). Finde einen Weg von A nach B über a,b,a,b

Aufgabe 1.19 Gegeben: Dreieck(–3|–4),(0|1),(3|–4) und der Punkt A(–1|–3). Find einen Weg von A über a,b,c zurück nach A. (Bezeichnungen der Seiten im Dreieck wie üblich.)

Aufgabe 1.20 Gegeben: Quadrat (±2|±2). Finde einen Weg von A(–1|1/2)

a) via a,b,c,d zurück nach A. (Bezeichnung der Seiten wie im Rechteck üblich.)

b) via d,a,b,c

1.2 Verkettung von zwei Geradenspiegelungen

1.2.1 Verkettung von Kongruenzabbildungen

Kongruenzabbildungen sind Abbildungen der Ebene in sich. Wenn wir wissen, was die Abbildungsvorschrift der Kongruenzabbildung ist, wissen wir wie das Bild jedes einzelnen Punktes aussieht.
Beispiel: wenn wir die Gerade kennen an der gespiegelt wird, können wir das Spiegelbild jedes Punktes konstruieren.
Bisher haben wir meistens beobachtet, was passiert, wenn einzelne Figuren abgebildet werden: Wenn wir eine Figur an einer Gerade spiegeln, erhalten wir eine Bildfigur. Eine weitere Spiegelung gibt das Bild des Bildes – eine Figur, die wieder kongruent ist zur ursprünglichen Figur.
Wir werden im Folgenden häufig nicht die Bilder von Figuren anschauen, sondern die Kongruenzabbildung "an sich" und was wir über die Hintereinanderausführung mehrerer Spiegelungen aussagen können.

Zur Erinnerung: Kongruenzabbildungen sind Hintereinanderausführungen mehrerer Geradenspiegelungen. Um dies effektiv beschreiben zu können, brauchen wir einige neue Bezeichnungen.
S_a und S_b bezeichnen Spiegelungen an den Geraden a und b
$S_b \circ S_a$ bezeichnet die Ausführung von zuerst S_a und dann S_b. (Vorsicht, hier passiert es leicht, das umzudrehen.)
$S_b \circ S_a$(f) bedeutet, die Figur f erst an a und dann an b zu spiegeln
Kongruenzabbildungen werden häufig mit K bezeichnet, zum Beispiel K= $S_b \circ S_{a.}$
$K_2 \circ K_1$ bezeichnet die Ausführung von zuerst K_1 und dann K_2

Aufgabe 1.21 Gegeben sind die Geraden a(0|0), (0|2) und b((0|0),(1|2) und c(0|2),(2|3) und die Strecke s von (–3,|4)) bis (–3,5|5,5). Finde die Bildfiguren unter den Abbildungen

K_1=$S_b \circ S_a$ K_2= $S_a \circ S_b$ K_3= $S_a \circ S_a$ K_4= $S_a \circ S_c$
$K_5 = K_1 \circ K_2$ $K_6 = K_1 \circ K_4$
Tipp: Viele Abbildungen lassen sich vereinfachen, wenn nachgedacht wird. Wer auf keine Idee kommt, muss konstruieren. Das Geodreieck darf verwendet werden.

Die Beobachtungen werden wir im Unterricht handschriftlich zusammenfassen. Hier kommt eine weitere Aufgabe:

Aufgabe 1.22 zur Verkettung von Kongruenzabbildungen: Betrachtet werden drei Geraden a, b und c. Dazu nehmen wir die folgenden Kongruenzabbildungen:

$K_1 = S_a \circ S_b$ $K_2 = S_a \circ S_c$ $K_3 = S_b \circ S_c$
$K_4 = S_b \circ S_a$ $K_5 = S_c \circ S_a$ $K_6 = S_c \circ S_b$
Diese Abbildungen können wieder miteinander verkettet werden. Ihr sollt nun die folgenden fünf Abbildungen untersuchen:

K_7= $K_1 \circ K_2$ K_8= $K_1 \circ K_4$ K_9= $K_2 \circ K_5$
K_{10}= $K_1 \circ K_3 \circ K_5$ K_{11}= $K_2 \circ K_6 \circ K_5$

a) Welche der fünf Abbildungen K_7 bis K_{12} sind die Identität?

b) Schreibe die Abbildungen, die nicht die Identität sind, in möglichst kurzer Form als Verkettung von Geradenspiegelungen.

1.2.2 Mengen mit Verkettungen

Aus der Algebra wissen wir, dass zum Beispiel die Zahlen miteinander "verkettet" werden können – nämlich mit Multiplikation oder mit Addition. Ergebnis ist wieder eine Zahl. Dabei gelten bestimmte Gesetze: Assoziativgesetz (Klammervertauschungsgesetz), Kommutativgesetz usw. In der Geometrie haben wir nun etwas ähnliches kennengelernt: auch Kongruenzabbildungen können miteinander verkettet werden. Wieder gelten bestimmte Regeln. Dieses Phänomen ist so wichtig, dass es einen besonderen Namen bekommen hat:

Definition 1.4 ***Gruppe***
Unter einer Gruppe verstehen wir eine Menge G, deren Elemente nach den unten aufgeführten Regeln miteinander verkettet werden können. Wir bezeichnen die Verkettung mit •.Es gelten folgende Regeln:

1. *Abgeschlossenheit:Das Resultat der Verkettung ist wieder ein Element der Menge.*
2. *Assoziativgesetz: Klammern dürfen vertauscht werden: (a ∘ b) ∘ c=a ∘ (b ∘ c)*
3. *Existenz der Identität: Es gibt ein Element (mit **id** bezeichnet), dass neutral ist a ∘ **id**=a*
4. *Existenz des Inversen": Zu jedem Element gibt es ein Element mit a ∘ b=**id***

Beispiel 1.2 1. Die rationalen Zahlen mit der Verkettung "+" bilden ein Beispiel für eine Gruppe.

2. Begründe die folgende Aussage: "Die rationalen Zahlen mit der Multiplikation bilden keine Gruppe. Wird die Null aus der Menge herausgenommen, so ist es eine Gruppe.

   In den Beispielen 1 und 2 gilt ausserdem das Kommutativgesetz, die Gruppe wird deshalb als kommutative Gruppe bezeichnet.

3. Mit dem was wir in der Stunde hergeleitet haben, sehen wir: auch die Menge der Kongruenzabbildungen bildet eine Gruppe, mit der Verkettung •.

Aufgabe 1.23 Warum bildet die Menge der Geradenspiegelungen keine Gruppe?

Aufgabe 1.24 .Bilden die natürlichen Zahlen mit der Verknüpfung "+" eine Gruppe?

Aufgabe 1.25 Bilden die ganzen Zahlen mit der Verknüpfung "+" eine Gruppe?

Aufgabe 1.26 Bilden die ganzen Zahlen mit der Verknüpfung "· " eine Gruppe?

1.2.3 Drehungen

Aufgabe 1.27 Finde zwei Geraden a und b, so dass $S_b \circ S_a$ eine Drehung

a) um A_1(0|0) mit φ_1=40°

b) A_2(1|1) um 120°

c) A_3 um –40° ist.

Aufgabe 1.28 Drehe das Quadrat (±2|±2) um S(5|3) mit Drehwinkel φ=60°

Aufgabe 1.29 Gegeben: A(0|4), Geraden b(0|–6),(–3|0) und d(5|0),(5|2).

a) Gesucht: Quadrat ABCD mit B∈b und D∈d.

b) Gesucht: gleichschenkliges Dreieck mit Spitze A und Basiswinkel 75 Grad, $B \in b$ und $C \in d$.

Aufgabe 1.30 Eine rechteckige Tischplatte (–2|8),(–2|0)(2|0)(2|8) soll um einen Zapfen drehbar gelagert werden, so dass sie in die Lage (–4|0)(–4|4)(4|0)(4|4) gebracht werden kann. Wo ist der Zapfen, wie gross ist der Drehwinkel?

Aufgabe 1.31 Das Quadrat ABCD mit Seitenlänge 4cm soll so gedreht werden, dass B′ im Mittelpunkt von ABCD liegt und die Gerade durch B′C′ auf der Diagonalen AC liegt und B′A′auf der Diagonalen BD

Aufgabe 1.32 Gegeben sind die beiden Kreise K_1(0|0),5) und K_2(0|0),3) und der Punkt A(4|6). Finde ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B∈K_1 und C∈K_2. Wie viele Lösungen gibt es?

1.2.4 Punktspiegelungen

Aufgabe 1.33 Gegeben: K_1((–6 | 0),4) und K_2((4 | 0),3) und der Punkt P(0 | 2). Gesucht: ein Punkt A∈K_1 und ein Punkt B∈K_2, so dass P die Strecke AB halbiert.

Aufgabe 1.34 Gegeben: K_1((–2 | 0),4) und K_2((3 | 0),3). Gesucht: eine Sekante durch P=K_1∩K_2, so dass gleich lange Sehnen entstehen.

1.2.5 Translationen

Die Verkettungvon zwei Geradenspiegelungen mit mit parallelen Geraden mit Abstand a...
... ergibt eine Verschiebung (Translation) um die Strecke 2a. Die Richtung der Translation ist senkrecht zu den Geraden.

Bei jeder Kongruenzabbildung lässt sich jeder Punkt mit seinem Bildpunkt durch einen Pfeil verbinden. Bei einer Translation sind alle diese Pfeile parallel und gleich lang. Die Menge dieser Pfeile wird **Vektor** dieser Verschiebung genannt. Ein Vektor ist also eine gerichtete Grösse: Er hat eine Länge und eine Richtung. Der Ansatzpunkt des Vektors ist allerdings nicht festgelegt. Wir sagen:

Alle Punkte werden bei der Translation um den gleichen Vektor verschoben.

Wird dann ein Verbindungspfeil zwischen Punkt und Bildpunkt eingezeichnet, so sagen wir:

Der Pfeil repräsentiert den Vektor.

Aufgabe 1.35 Verschiebe das Dreieck A(-3 | 0), B(-1 | -2), C(-2 | 1) um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.36 Eine Translation führt den Punkt A(-3 | 1) in A'(7 | 3) über. Zerlege diese Translation in zwei Spiegelungen.

Aufgabe 1.37 Bernhard wohnt in W(-3 | 6) und geht in S(3 | 0) zur Schule. Auf dem Schulweg befindet sich ein Fluss (zwischen den waagrechten Geraden in Höhe 3 und 2.) Wo sollte ihm eine Brücke gebaut werden, damit er den kürzest möglichen Schulweg hat.

Aufgabe 1.38 Gegeben ist die Gerade g (x-Achse) und die Gerade h(-4 | 1)(6 | 3). Konstruiere eine Gerade x, die mit g einen $60°$-Winkel einschliesst und auf der g und h eine Strecke der Länge 2 ausschneiden.

1.2.6 Verkettungen von Drehungen

Aufgabe 1.39 Drehe das Quadrat (0 | 0)(–4 | 0)(–4 | 4)(0 | 4) um M_1(5 | 1) mit φ_1=50° und dann um M_1 mit φ_2=80°.

Aufgabe 1.40 Wie die letzte Aufgabe aber mit vertauschter Reihenfolge der Drehungen.

Aufgabe 1.41 Drehe das Quadrat (0 | 0)(–4 | 0)(–4 | 4)(0 | 4) um M_1(5 | 1) mit φ_1=50° und dann um M_2(6 | –2) mit φ_2=80°.

Aufgabe 1.42 Wie die letzte Aufgabe aber mit vertauschter Reihenfolge der Drehungen.

Aufgabe 1.43 Gegeben sind die drei Drehungen D_1((0 | 0),30°) und D_2((2 | 2),40°) und D_3((–2 | 1),80°). Finde die Fixpunkte von $D_1 \circ D_2$ und von $D_1 \circ D_2 \circ D_3$

Aufgabe 1.44 Gegeben sind die Punktspiegelungen um die Punkte P_1(0 | 0) und P_2(2 | 2). Wie lässt sich die Verkettung dieser Punktspiegelungen als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen darstellen? Gibt es einen Fixpunkt?

Aufgabe 1.45 $T_1 = S_a \circ S_b$ mit $a(0|0)(4|0)$ und $b(0|2)(4|0)$ und
$T_2 = S_c \circ S_d$ mit $c(2|2)(4|2)$ und $d(2|2)2|4)$. Welche Art von Abbildung ist $T_1 \circ T_2$, beschreibe die Abbildung mit Geradenspiegelungen.

Aufgabe 1.46 $T_1 = S_a \circ S_b$ mit $a(0|0)(4|0)$ und $b(0|1.5)(4|1.5)$ und
$T_2 = S_c \circ S_d$ mit $c(0|0)(2|3)$ und $d(1|1.5)(3|4.5)$. Welche Art von Abbildung ist $T_1 \circ T_2$, beschreibe die Abbildung mit Geradenspiegelungen.

Aufgabe 1.47 $T = S_a \circ S_b$ mit $a(0|0)(4|0)$ und $b(0|1.5)(4|1.5)$ und
D die Drehung um $M(2|2)$ um 60 Grad.

Beschreibe $D \circ T$ mit Geradenspiegelungen.