Lineare Algebra

Bedanken möchte ich mich bei Bernhard Ruh und Christoph Drollinger, deren Skripte als Vorlagen für diese Ausarbeitung dienten. Die Anteile von Christoph Drollinger wurden von Salvatore Bonaccorso in Latex gesetzt. Auch dafür vielen Dank.

Torsten Linnemann, Solothurn, 13. April 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren – Wiederholung

Grundraum in diesem Kapitel ist der $\mathbb{R}^n$. Bisher war für uns meist $n = 2$ (Ebene) oder $n = 3$ (dreidimensionaler Raum). Im Prinzip sind aber beliebige natürliche Zahlen für n möglich. In grossen Teilen dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Definition 1 *Ein Vektor fasst alle gleich langen Pfeile gleicher Richtung zusammen.*

Wir sagen, dass ein Pfeil einen Vektor repräsentiert. Insbesondere hat ein Vektor keinen bestimmten Ansatzpunkt. Die Kongruenzabbildung „Translation" wird also durch einen Vektor beschrieben. Die Pfeile, die entsprechende Randpunkte in einem Parallelogramm verbinden, gehören zu einem Vektor. Kräfte in der Physik sind Vektoren – auch dort gibt es die Freiheit, den Ansatzpunkt der Kraft einzuzeichnen.

Wir beschreiben Vektoren meist durch untereinandergeschriebene Zahlen, zum Beispiel $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Diese Zahlen heissen *Komponenten* des Vektors.

Definition 2 *Der Betrag eines Vektors* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *ist* $|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$

Bemerkung: Einige Definitionen in diesem Abschnitt werden nur für den $\mathbb{R}^2$ gegeben, sie lassen sich aber leicht auf den $\mathbb{R}^3$ und andere Räume übertragen.

Im Gegensatz zu Punkten lässt sich mit Vektoren rechnen. Zwei Vektoren werden addiert, indem ihre Komponenten addiert werden.

Ein Vektor wird mit einer Zahl multipliziert, indem alle Komponenten mit dieser Zahl multipliziert werden.

Es gelten die üblichen Rechenregeln, zum Beispiel $r \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = r \cdot \vec{x} + r \cdot \vec{y}$.

Eine besondere Rolle spielen die *Standardeinheitsvektoren* $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt zum Beispiel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$.

Definition 3 (Lineare Unabhängigkeit) *Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen* linear unabhängig, *wenn die Gleichung*

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$$

nur für $r = s = t = 0$ erfüllt werden kann. Andernfalls heissen sie linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^2$ können höchstens zwei Vektoren linear unabhängig sein. Ein Beispiel für drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind die drei Standardeinheitsvektoren. Ein Beispiel für drei linear abhängige Vektoren ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Definition 4 *Skalarprodukt Es werden zwei Vektoren so multipliziert, dass sich eine Zahl ergibt. Es gilt im R^2 (und mit entsprechend mehr Komponenten in anderen Räumen)*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k b_k$$

Satz 1 $\vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$

Mit dem Skalarprodukt lässt sich also leicht überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Vektorprodukt nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Das Ergebnis beim Vektorprodukt ist ein Vektor. Es gilt der folgende Satz.

Satz 2 $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.

Geraden und Ebenen

Eine Gerade lässt sich beschreiben, indem ein Punkt X_0 auf der Geraden bezeichnet wird und eine Richtung auf der von diesem Punkt aus gesehen alle weiteren Punkte liegen. Dies fügt sich in den Zusammenhang der Vektoren schön ein, indem *Ortsvektoren* eingeführt werden: der Ortsvektor $\overrightarrow{x_0}$ zum Punkt X_0 wird repräsentiert durch einen Pfeil vom Koordinatenursprung zu X_0. Die Ortsvektoren $\overrightarrow{x}$, die zu einer Gerade g gehören, lassen sich dann beschreiben durch

$$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + r \cdot \overrightarrow{u},$$

wobei $\overrightarrow{u}$ in die gewünschte Richtung zeigt und der *Parameter* r alle reellen Zahlen durchläuft.

In gewisser Weise hebt also die Einführung des Ortsvektors die strenge Trennung zwischen Vektoren und Punkten wieder auf. Im folgenden Kapitel werden wir so weit gehen, zu Vektoren die entsprechenden Punkte im Koordinatensystem zu betrachten.

Zunächst aber noch eine Erinnerung an die Koordinatenform der Ebenen/Geradengleichung:

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{x} = c$$

beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ bzw. eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Dabei ist $\overrightarrow{n}$ ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene/Geraden liegt.

Beispiel 1 $\mathbb{E}$ ist die Ebene senkrecht zu $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch den Punkt $X_0(1|3|0)$. Es gilt $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{x_0} = 1 + 2 \cdot 3 + 0 = 7$, also ist die Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7.$$

Wird nun das Skalarprodukt berechnet, so ergibt sich einfach

$$x + 2y + 4z = 7$$

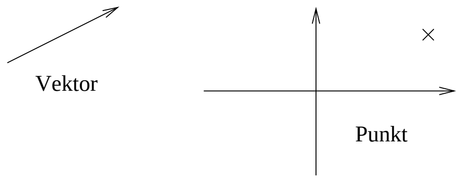
und mit dieser eleganten Form, eine Ebene zu beschreiben, schliesst die Wiederholung.

Im Folgenden werden wir Abbildungen auf Vektoren betrachten. Bisher kennen wir vor allem Abbildungen von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen: die Funktionen. Die einfachsten Funktionen sind die linearen Funktionen $x \mapsto mx + q$ mit dem besonderen Spezialfall der Proportionalität $x \mapsto mx$. Wir betrachten nun die entsprechenden Abbildungen von Vektoren mit zwei Komponenten in die Vektoren mit zwei Komponenten.

Was bei den Funktionen Proportionalität heisst, wird bei den Vektoren zur linearen Abbildung. Was bei den Funktionen lineare Funktion heisst, wird bei den Vektoren zur affinen Abbildung. Die Bezeichnungen der Schulmathematik sind hier nicht konsistent mit den Bezeichnungen in der Mathematik.

2 Lineare Abbildungen

Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den Raum aller Vektoren in der Ebene. In Zeichnungen wählen wir Repräsentanten mit dem Ansatzpunkt im Koordinatenursprung. Es reicht dann, den Zielpunkt des Vektors zu zeichnen. Im Prinzip identifizieren wir also einen Vektor $\vec{x}$ mit dem Punkt X, dessen Ortsvektor $\vec{x}$ ist.



So können wir bekannte Abbildungen, wie zum Beispiel Drehungen und Spiegelungen auf Vektoren anwenden.

Definition 5 *Eine Abbildung* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *heisst* lineare Abbildung *falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
2. $f(r\vec{a}) = rf(\vec{a})$ *(mit* $r \in \mathbb{R}$*)*

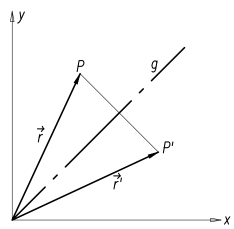
Bemerkung: Für lineare Abbildungen gilt stets $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

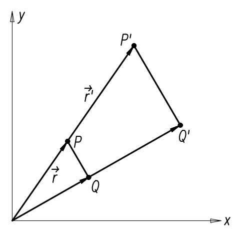
Beispiel 2 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Es gilt hier

1.
$$f\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = f(\vec{a}) + f\left(\vec{b}\right)$$

2.
$$rf(\vec{a}) = rf\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_2 \\ ra_1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}\right) = f(r\vec{a})$$

Diese Abbildung vertauscht die x- und die y-Koordinate, ist also die Spiegelung an der Geraden $y = x$. Wir werden später sehen, dass alle Geradenspiegelungen an Ursprungsgeraden lineare Abbildungen sind.





Beispiel 3 Zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k, in Formeln: $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Beispiel 4 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ -5x + 6y \end{pmatrix}$

Beim letzten Beispiel ist die Überprüfung, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt, bereits etwas aufwändiger.

Es wird nun gezeigt, dass sich lineare Abbildungen sehr einfach identifizieren und darstellen lassen, wenn die Bilder[1] der Standardeinheitsvektoren betrachtet werden. Es gilt nämlich:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}\right) = xf\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yf\left(\overrightarrow{e}_2\right)$$

Gilt nun für unsere Abbildung $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, so ist

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xf\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yf\left(\overrightarrow{e}_2\right) = x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_{11} + ya_{12} \\ xa_{21} + ya_{22} \end{pmatrix}$$

Satz 3 *Die Bilder der Standardeinheitsvektoren legen eine lineare Abbildung eindeutig fest.*

Beispiel 5 f ist gegeben durch $\overrightarrow{e_1} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{e_2} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ -5x + 6y \end{pmatrix}$, also das vorherige Beispiel.

Genau genommen brauchen wir nur die vier Zahlen a_{11}, a_{21}, a_{12} und a_{22} um eine lineare Abbildung zu beschreiben. Wir schreiben diese 4 Zahlen in ein Schema und nennen dieses Matrix. Diese Vereinfachung ist Thema des nächsten Abschnitts. Zunächst aber noch einige Aufgaben.

Aufgabe 1 Ist $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung?

Aufgabe 2 Für eine lineare Abbildung gelte $f(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Für welche Vektoren $\overrightarrow{k}$ gilt $f(\overrightarrow{k}) = \vec{0}$?

Aufgabe 3 Hier wird klar, dass nicht unbedingt die Bilder der Standardeinheitsvektoren gegeben werden müssen, um eine lineare Abbildung zu beschreiben.

Bestimme jeweils die Bilder der Standardeinheitsvektoren. (Es sind Gleichungen bzw Gleichungssysteme zu lösen.)

[1] Eine Vokabel: Das *Bild* von $\vec{a}$ unter der Abbildung f ist $f(\vec{a})$

a) Für eine lineare Abbildung f gelte $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) Für eine lineare Abbildung f gelte $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) Für eine lineare Abbildung f gelte $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 Bestimme jeweils die Bilder der Standardeinheitsvektoren.

a) Für eine lineare Abbildung f gelte $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Für eine lineare Abbildung f gelte $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Matrizen

Eine Matrix A der Form $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ wird folgendermassen mit Vektoren multipliziert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_{11} + ya_{12} \\ xa_{21} + ya_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel 6 $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Satz 4 *Jede lineare Abbildung f lässt sich in der Form $f(\overrightarrow{a}) = A \cdot \overrightarrow{a}$ mit einer Matrix A schreiben. Die Spalten der Matrix bestehen aus den Bildern der Standardeinheitsvektoren.*

Beweis: ergibt sich aus den vorigen Erklärungen.

Beispiel 7 Gegeben ist $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Bestimme die Bilder der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

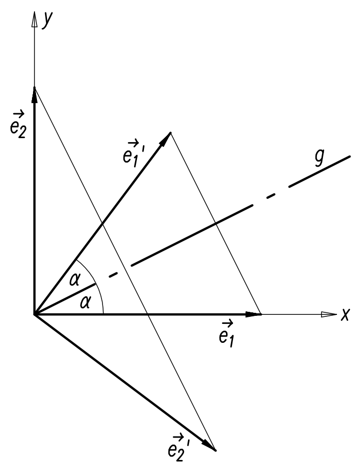
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Was geschieht wenn der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ abgebildet wird?

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} f(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f(\vec{a}) + f(\vec{b}).$$

Beispiel 8 *Spiegelung an der Geraden* $g : y = \frac{1}{2}x$.
Wir verwenden den obigen Satz. Um die Abbildungsgleichung zu erhalten werden einzig die Koordinaten von $f(\vec{e_1})$ und $f(\vec{e_2})$ benötigt.Nun gilt aber



$$\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} \\ f(\vec{e_2}) &= \begin{pmatrix} \cos(90 - 2\alpha) \\ -\sin(90 - 2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ folgt

$$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \qquad f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Die Bildkoordinaten des Punktes $P(2/3)$ ergeben sich durch Multiplikation der Matrix mit dem entsprechenden Ortsvektor

$$A\vec{r} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \cdot 2 + 0.8 \cdot 3 \\ 0.8 \cdot 2 - 0.6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

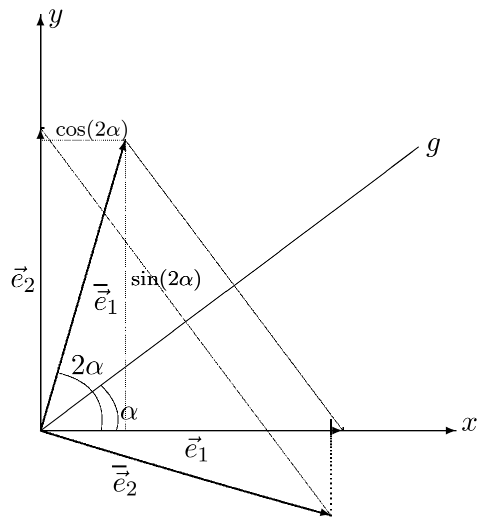
Beispiel 9 *Spiegelung an der Geraden* $g : y = \tan(\alpha)\, x$ (g geht durch den Nullpunkt, der Winkel zwischen g und der x-Achse ist α).

Bilden wir zunächst wieder $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ ab.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha) \\ -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Beispiele sind

$$S(90^\circ) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

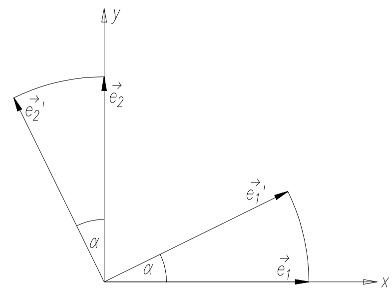
Drehung mit Zentrum O um einen Winkel α

Beispiel 10 Aus den Bildern der Basisvektoren

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ergibt sich sofort die Drehmatrix

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



Wird z.B. der Punkt $P(7/2)$ um 30° gedreht, so ergeben sich die Bildkoordinaten mit der Rechnung

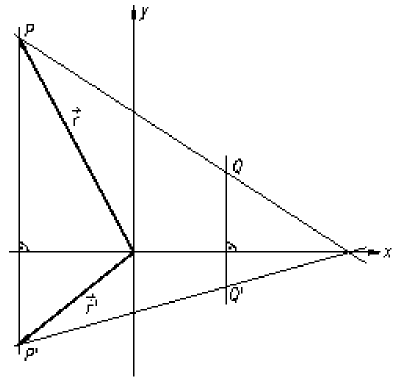
$$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{7+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 Bestimme das Bild der Geraden $g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter der linearen Abbildung, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Satz 5 *Für lineare Abbildungen gilt: Bilder von Geraden sind Geraden.*

Aufgabe 6 Bestimme k aus den Angaben zu A und dem Bild.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$



4 Das Matrixprodukt

Sei f die Drehung mit Zentrum O und Drehwinkel $60°$ und g die Spiegelung an der Geraden $y = x$. Führen wir die beiden Abbildungen hintereinander aus, zuerst f dann g, so entsteht eine neue Abbildung h. Wegen $h(\vec{a}) = g(f(\vec{a})$ für jeden Vektor $\vec{a}$ lässt sich auch schreiben

$$h = g \circ f.$$

Jeder dieser Abbildungen kann mit einer Matrix beschrieben werden.

$$\text{Matrix von } f : A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{Matrix von } g : B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matriz von h zu finden, betrachten wir die Bilder der Einheitsvektoren:

$$\vec{e_1} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_2} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also für die Matrix C der Abbildung h:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Definition 6 *Gegeben seine eine lineare Abbildungen f mit der Matrix A und eine lineare Abbildung g mit der Matrix B. Dann heisst die Matrix C der zusammengesetzten Abbildung $h = g \circ f$ das Produkt der Matrixen B und A. Wir schreiben*

$$C = B * A$$

In unserem Beispiel ist somit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt folgende Regel (die Pfeile dienen als Gedächtnisstütze)

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{a \quad b} \\ \overrightarrow{c \quad d} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Big\downarrow \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} & \Big\downarrow \begin{matrix} q \\ s \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} px+qy \\ rx+sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(px+qy)+b(rx+sy) \\ c(px+qy)+d(rx+sy) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (ap+br)x+(aq+bs)y \\ (cp+dr)x+(cq+ds)y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hinweis Beachte die Reihenfolge der Faktoren, denn das Matrizprodukt ist nicht kommutativ, wie wir gleich noch einmal deutlich sehen werden.

Beispiel 11 Gegeben sind die Matrix A der Abbildung f und die Matrix B der Abbildung g. Wir suchen die Matrix C der Abbildung $h_1 = g \circ f$ und die Matrix D der Abbildung $h_2 = f \circ g$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Matrixproduktes berechnen wir

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 12 Das Aneinanderfügen von zwei Drehungen ist von der konstruktiven Geometrie bekannt. Nun steht auch einer rechnerischen Behandlung nichts mehr im Wege.

Drehungen mit Zentrum O und Drehwinkel α seien mit D_α bezeichnet. Werden zwei Drehungen D_α und D_β hintereinander ausgeführt entsteht die Drehung $D_{\alpha+\beta}$. Die entsprechenden Matrizen A, B resp. C sind

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits ist $C = B * A$, also

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \ldots\ldots \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Der Vergleich der Formeln für C liefert die bekannten Additionstheoreme für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$.

Beispiel 13 Die Abbildung f mit der Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ wird mit der Abbildung g mit der entsprechenden Abbildungsmatrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu den Abbildungen $h_1 = g \circ f$ und $h_2 = f \circ g$ zusammengesetzt. Bestimme die Abbildungsmatrix C von h_1 und die Abbildungsmatrix D von h_2.

$$C = BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$D = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 Bilde $A * B$ und $B * A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 Es ist $f =$„Drehung um 0 um 240 Grad“ und $g =$„Spiegelung an der Geraden $y = -2x$“. Berechne die Matrix von $f \circ g$.

Aufgabe 9 Es ist $f =$„Spiegelung an der x-Achse“ und $g =$„Spiegelung an der y-Achse“. Berechne die Matrix von $f \circ g$ und $g \circ f$.

Aufgabe 10 Es ist $f =$„Drehung um 0 um 40 Grad“ und $g =$"Drehung um 0 um 320 Grad“. Wie lautet die Matrix von $f \circ g$?

5 Die Umkehrabbildung

Wie bei den Funktionen können wir versuchen, die Abbildungen umzukehren, also zu f eine Abbildung f^{-1} suchen mit $f^{-1} \circ f(\vec{a}) = \vec{a}$. Wir müssen die zur Abbildung gehörenden Gleichungen umkehren. Wir schreiben $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ und erhalten als Abbildungsgleichungen der zur Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ gehörenden Abbildung:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

Wir lösen dies nach x und y auf und erhalten:

$$x = \frac{a_{22}}{D}x' - \frac{a_{12}}{D}y'$$

$$y = -\frac{a_{21}}{D}x' + \frac{a_{11}}{D}y'$$

Dabei ist $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Wir bezeichnen $D = \det A$ als *Determinante* von A.

Beispiel 14 Die Abbildung f sei gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

die Abbildungsgleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} x' &= x - 3y \\ y' &= x + 2y \end{aligned}$$

Wir erhalten nun die Zuordnungsvorschriften von f^{-1} durch Lösen der Gleichungen auf x und y.

$$\begin{aligned} x &= 0.4\,x' - 0.6\,y' \\ y &= -0.2\,x' + 0.2\,y' \end{aligned}$$

Fassen wir f^{-1} als eigenständige Abbildung auf (und nicht als Inverse einer anderen Abbildung), vertauschen wir wieder x mit x' und y mit y':

$$\begin{aligned} x' &= 0.4\,x - 0.6\,y \\ y' &= -0.2\,x + 0.2\,y \end{aligned}$$

Die Matrix von f^{-1} lautet also

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Definition 7 *Ist A eine zur Abbildung f gehörende Matrix, so heisst die zur inversen Abbildung f^{-1} gehörende Matrix* ***die inverse Matrix*** *von A und wird mit A^{-1} bezeichnet.*

Satz 6 *Es gilt* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Satz 7 *Nur Matrizen mit* $\det A \neq 0$ *lassen sich invertieren.*

Beispiel 15 *Verschlüsseln von Botschaften*
Wir ordnet den Buchstaben des Alphabetes die natürlichen Zahlen zu:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Zr Verschlüsselung benützen wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

So ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & E & T & E & R \\ M & E & I & E & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 5 & 20 & 5 & 18 \\ 13 & 5 & 9 & 5 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 & 25 & 67 & 25 & 90 \\ 42 & 15 & 28 & 15 & 54 \end{pmatrix}.$$

Um die geheime Botschaft

$$\begin{pmatrix} 17 & 81 & 55 & 46 \\ 11 & 50 & 30 & 29 \end{pmatrix}$$

zu entschlüsseln, berechnen wir die inverse Verschlüsselungsmatrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 81 & 55 & 46 \\ 11 & 50 & 30 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 20 & 5 \\ 5 & 19 & 5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & L & T & E \\ E & S & E & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11 In dieser Aufgabe wird die gleiche Verschlüsselungsmatrix wie oben verwendet.

a) Verschlüssle die Botschaft $\begin{pmatrix} M & A & T & U & R \\ K & O & M & M & T \end{pmatrix}$.

b) Entschlüssle die Botschaft $\begin{pmatrix} 90 & 37 & 51 & 64 & 91 \\ 56 & 23 & 28 & 38 & 59 \end{pmatrix}$

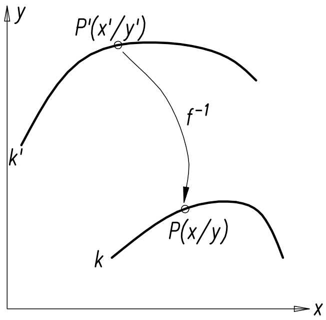
Aufgabe 12 Finde die inversen Matrizen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.00001 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.00001 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Es lässt sich erkennen, dass auch Matrizen, die deren Komponenten nahe beieinander liegen, sehr unterschiedliche Inverse haben können. Dies ist in numerischen Berechnungen mit dem PC ein Problem.

Bilder von Kurven

Statt von Vektoren ist in diesem Beispiel von Punkten die Rede.
Wird eine Kurve k mit der Gleichung $F(x,y) = 0$ einer Abbildung f unterworfen, so stellt sich die Frage nach der Gleichung der Bildkurve k'. Nun liegt ein Punkt $P(x'/y')$ genau dann auf k', wenn sein Urbild $P(x/y)$ auf k liegt, die Koordinaten x und y also die Gleichung $F(x,y) = 0$ erfüllen. So werden die Abbildungsgleichungen der inversen Abbildung f^{-1} benutzt, um in der Kurvengleichung die Koordinaten x, y durch x', y' zu ersetzen. Wird nun k' als eigenständige Kurve aufgefasst, werden die Striche danach weggelassen



Beispiel 16 Wir unterwefen den Kreis $k : x^2 + y^2 = 1$ einer der linearen Abbildung f mit den Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{1}{2}y \\ y' &= -\frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

Wir lesen die entsprechende Matrix A ab und berechnen A^{-1}

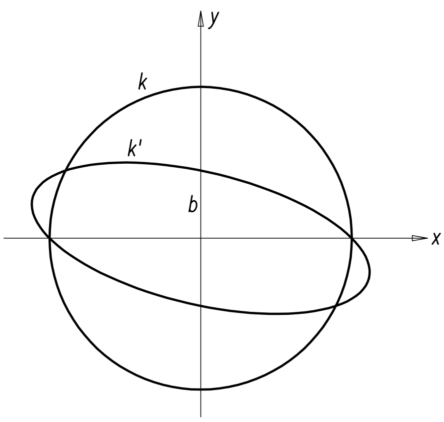
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die Abbildungsgleichungen der inversen Abbildung f^{-1}

$$\begin{aligned} x &= x' + y' \\ y &= 2y'. \end{aligned}$$

Diese setzen wir in die Kurvengleichungen von k ein und erhalten

$$\begin{aligned} k' \; : \; & (x' + y')^2 + (2y')^2 = 1 \\ & (x')^2 + 5(y')^2 + 2x'y' = 1, \end{aligned}$$



oder einfach nach dem Weglassen der Striche bei den Koordinaten

$$k' : x^2 + 5y^2 + 2xy = 1.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich z.B. die Schnittpunkte mit der y-Achse

$$b = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme in zwei Unbekannten

Ein Gleichungssystem heisst *homogen*, wenn die rechte Seite Null ist. Beispiel:

$$ax + by = 0 \text{ und } cx + dy = 0.$$

Eine Lösung ist stets $x = y = 0$. Wir überprüfen, wann es weitere Lösungen gibt.

Multiplizieren der Gleichungen (wir setzen voraus, dass entweder $b \neq 0$, oder $d \neq 0$.)

$$adx + bdy = 0 \text{ und } bcx + bdy = 0.$$

Zweite Gleichung Minus erste Gleichung

$$(ad - bc)x = 0.$$

Es gibt also weitere Lösungen, wenn $ad - bc = 0$. Ist $b = d = 0$, so lässt sich ein beliebiges $(0|y)$ als Lösung wählen. Schreiben wir die Koeffizienten auf der linken Seite als Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so wird klar, dass das Gleichungssystem weitere Lösungen hat, falls $\det A = 0$. Wir sehen hier, dass Matrizen auch zur Behandlung linearer Gleichungssysteme geeignet sind.

Satz 8 *Gegeben sind eine Matrix A und ein fester Vektor $\vec{b}$. Die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$*

Dies lässt sich trefflich bei einem algebrafähigen Taschenrechner ausnutzen, um Gleichungssysteme zu lösen. (und insbesondere schnell einzutippen...)

Die Determinante hat noch wichtige Eigenschaften, die wir im Folgenden brauchen werden:

Satz 9 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ und $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ziel dieses Abschnittes ist die Klassifikation der linearen Abbildungen. Gegeben ist also eine Abbildung f der Form

$$\vec{r}' = A\vec{r}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ein Hilfsmittel zur Klassifikationist die Frage, ob die Abbildung Fixrichtungen besitzt. Dazu müssen wir feststellen, ob Vektoren $\vec{u} \neq \vec{o}$ existieren, für welche

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

für ein gewisses λ gilt. Ausführlich geschrieben bedeutet dies, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\,u_1 + b\,u_2 &= \lambda\,u_1 \\ c\,u_1 + d\,u_2 &= \lambda\,u_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcrcl} (a-\lambda)\,u_1 & + & b\,u_2 & = & 0 \\ c\,u_1 & + & (d-\lambda)\,u_2 & = & 0 \end{array}$$

eine nicht-triviale Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Determinante der Koeffizienten gleich Null ist. Die zu betrachtende Matrix ist also $\begin{pmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{pmatrix}$ mit der Determinante

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0.$$

Es entsteht also die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0,$$

welche zwei, eine oder keine reelle Lösung besitzt.

Definition 8 *Ein Vektor $\vec{u}$ mit $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ heisst* Eigenvektor der Matrix A; die Zahl λ heisst der zugehörige *Eigenwert von A.*

Jedem Eigenvektor $\vec{u}$ entspricht damit eine Fixgerade durch den Ursprung. Ist der zugehörige Eigenwert $\lambda = 1$, so liegt sogar eine Fixpunktgerade vor.

Beispiel 17 Wir bestimmen die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Fixgeraden durch den Ursprung der Abbildung f, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Zunächst berechnen wir die Eigenwerte aus

$$(3-\lambda)(-4-\lambda) - (-3)(2) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

und erhalten

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Für diese Werte von λ existieren also nicht triviale Lösungen des Systems $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Für $\lambda_1 = 2$ ergibt dies

$$\begin{array}{rcrcr} 3\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 2\,u_1 \\ -3\,u_1 & - & 4\,u_2 & = & 2\,u_2 \end{array}, \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{rcrcr} u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \\ -3\,u_1 & - & 6\,u_2 & = & 0 \end{array}$$

Die beiden Gleichungen sind wie gewünscht gleichbedeutend und wir wählen aus der ersten Gleichung die Lösung $u_1 = -2,\ u_2 = 1$. Wir finden damit den ersten Eigenvektor

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Fixgerade

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

Auf analoge Weise findet man für $\lambda_2 = -3$ das System

$$\begin{array}{rcrcr} 3\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & -3\,u_1 \\ -3\,u_1 & - & 4\,u_2 & = & -3\,u_2 \end{array}, \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{rcrcr} 6\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \\ -3\,u_1 & - & 1\,u_2 & = & 0 \end{array}$$

mit der Lösung $u_1 = 1,\ u_2 = -3$. Der zweite Eigenvektor

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und die zweite Fixgerade

$$y = -3x$$

sind damit gefunden.

Aufgabe 13 Wie viele Eigenwerte hat eine Drehung?

Aufgabe 14 Wie viele Eigenwerte hat eine Geradenspiegelung? Wie lauten diese?

Aufgabe 15 Wie viele Eigenwerte hat eine zentrische Streckung? Wie lauten diese?

Aufgabe 16 Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17 Eine lineare Abbildung ist durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimme alle Fixgeraden der Abbildung.

Aufgabe 18 Gegeben ist eine Abbildung durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & k \end{pmatrix}$. Für welches k hat die Abbildung die Fixgerade $y = 4x$?

7 Affine Drehungen

In Beispiel 12 wurden bereits zwei Drehungen behandelt.

Etwas komplizierter wird das Zusammensetzen zweier Drehungen, wenn die zweite Drehung ihr Zentrum in einem Punkt $Z \neq O$ hat. Für diese Drehung D_β^Z gilt

$$D_\beta^Z = T \circ D\beta \circ T^{-1}.$$

Dabei ist T die Translation um $\vec{c} = \overrightarrow{OZ}$ und T^{-1} jene um $-\vec{c}$. Für die Zusammensetzung D folgt entsprechend

$$D = T \circ D_\beta \circ T^{-1} \circ D_\alpha$$

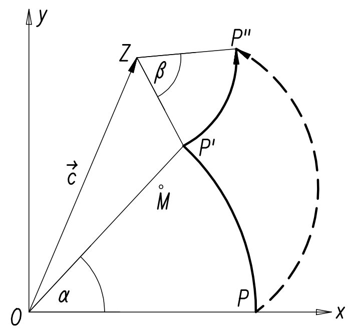


Abb.1: Zusammensetzen von Drehungen

beziehungsweise mit einem Ortsvektor als Argument

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= D(\vec{r}) = T \circ D\beta \circ T^{-1}(A\vec{r}) \\ &= T \circ D_\beta(A\vec{r} + \vec{c}) = T(B * A\vec{r} + B\vec{c}) \\ &= BA\vec{r} - B\vec{c} + \vec{c} \end{aligned}$$

Bekanntlich ist D wieder eine Drehung, ihr Zentrum M ist der Fixpunkt der Abbildung, welcher aus

$$BA\vec{r} - B\vec{c} + \vec{c} = \vec{r}$$

berechnet werden kann.

8 Lösungen

Lineare Abbildungen

A. 1: nein **A. 2:** $2x = -y$

A. 3: a) $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

A. 4: a) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrizen

A. 5: $\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **A. 6:** $k \cong -3/7 \cong -5/11$

Matrixprodukt

A. 7: $A * B = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$ $B * A = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ 18 & -20 \end{pmatrix}$

A. 8: $\begin{pmatrix} -0.39 & 0.92 \\ 0.92 & 0.39 \end{pmatrix}$ **A. 9:** Id **A. 10:** $-Id$

Eigenwerte und Eigenvektoren

A. 13: keinen **A. 14:** 1 und -1 **A. 15:** k

A. 16: A) Eigenwert 1, Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B) Eigenwerte ± 1, Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

C) Eienwerte 2 und 1, Eigenvekotren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D) Eigenwerte 4.6 und 2.4, Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0.525 \\ 0.851 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.525 \end{pmatrix}$

A. 17: $y = -x$ und $y = x/2$ **A. 18:** $k = 8$