

Stereometrie

Torsten Linnemann

Kantonsschule Solothurn

Tel.: 032/6214331

e-mail: tolinnemann@tiscali.ch

homepage: www.kanti-so.so.ch/linnemann

17. März 2006

Dank: Dieses Leitprogramm beruht auf Unterlagen von Robert Baggenstos, dem ich an dieser Stelle dafür danken möchte.

Inhaltsverzeichnis

1	Der Quader	3
2	Das Prisma	5
3	Die Pyramide	8
4	Der Zylinder	11
5	Der Kegel	12
6	Der Satz von Cavalieri	14
7	Die Kugel	15
A	Drehkörper	19
B	Arbeitsaufträge	20
C	Lösungen	21

Einleitung

Darum geht es: Stereometrie: das ist die Geometrie des Raumes. In diesem Leitprogramm sollt ihr mit einigen geometrischen Körpern vertraut werden: Quader, Prismen, Zylinder, Pyramiden, Zylinder, Kegel und Kugeln. Ihr werdet für alle diese Körper Formeln für das Volumen und die Oberfläche kennenlernen und in vielen Aufgaben anwenden.

Das lernt ihr: Diese vielen Formeln braucht ihr nicht alle auswendig zu können. Ihr solltet die Formelsammlung stets dabei haben, um mit ihrer Hilfe sicher Berechnungen von Körpern durchführen zu können. Ziel ist es, die räumliche Anschauung zu stärken. Ausserdem werdet ihr feststellen, dass ihr vieles, was ihr bisher gelernt habt, in der Stereometrie anwenden könnt: Trigonometrie, quadratische Gleichungen, einige wenige Gleichungssysteme...

So geht es weiter: Stereometrie ist natürlich nicht nur gut für das räumliche Anschauungsvermögen. In vielen technischen Berufen und der Physik wird sie häufig gebraucht. Insbesondere im Maschinenbau und in der Architektur wird sie intensiv benötigt. In eurer weiteren Laufbahn im Mathematikunterricht werden häufig stereometrische Aufgabenstellungen vorkommen: so wie ihr in diesem Leitprogramm das Lösen quadratischer Gleichungen und die Trigonometrie wiederholen könnt, werden in vielen anderen mathematischen Themen Körperberechnungen vorkommen. Es ist wichtig, dass ihr die wichtigsten Formeln sicher anwenden könnt.

Die Arbeitsweise in diesem Leitprogramm (bitte genau durchlesen)

Stillarbeit: Der Schwerpunkt dieses Leitprogrammes liegt im Lösen von Übungsaufgaben. Theoretische Herleitungen sind kurz gehalten oder ins Additum ausgegliedert. Ihr solltet die Kapitel jeweils genau durcharbeiten und alle Aufgaben lösen. Arbeitet dabei möglichst viel alleine und selten mit euren NachbarInnen zusammen. Die Lösungen zu den Übungen stehen am Ende des Skripts. Wer gar nicht weiterkommt, kann sich die aufliegenden Musterlösungen anschauen.

Literaturstudium An einigen Stellen wird verlangt, etwas in Büchern nachzulesen. Die dazugehörigen Bücher liegen, teils als Kopien, aus. Macht euch jeweils Notizen über den Inhalt für eure Unterlagen. Während des Literaturstudiums wäre es gut, wenn ihr in Zwei- bis Dreiergruppen arbeitet.

Kapiteltests: Am Ende jeden Kapitels (Ausnahme: Satz von Cavalieri) kommt ihr bitte zur Lehrkraft. Dort gibt es einen Kapiteltest, der an einem separaten Platz nur mit Hilfe der Formelsammlung und dem Taschenrechner (aber ohne das Leitprogramm) zu lösen ist. Gebt dann die Lösungen der Lehrkraft. Wichtiges Kriterium ist auch, dass die Lösungen leserlich dargestellt sind. Sollte eine Lösung falsch sein, so gibt es einen Tipp und ihr müsst eine verbesserte Version erstellen. Die Lehrkraft führt eine Liste über den Arbeitsfortschritt.

Fixpunkte: Nach Bedarf oder zu vorher festgelegten Zeiten gibt es die Möglichkeit, Probleme im Klassenverband zu besprechen.

Arbeitstempo: Einer der Vorteile des Arbeitens mit Leitprogrammen ist, dass jede Person das Arbeitstempo angemessen wählen kann. Wie schnell in der Schule geschafft wird und ob auch zu Hause Aufgaben gelöst werden, ist allen selbst überlassen. Die Lehrkraft wird allerdings darauf achten, dass niemand zu sehr in Rückstand gerät.

Klausur: Tja, am Ende gibt es dann auch eine Klausur...

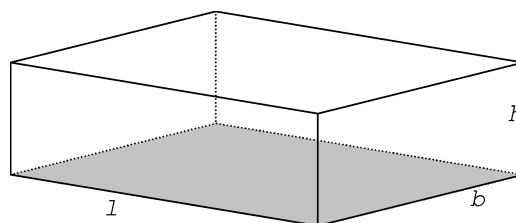
1 Der Quader

Quader werden hier zum Anlass genommen, noch einmal das Wissen über Trigonometrie und quadratische Gleichungen aufzufrischen.

Aufgabe 1.1 Ein Quader besitzt 8 Eckpunkte und 12 Kanten. Seine Oberfläche besteht aus 6 Vierecken, welche im allgemeinen nicht quadratisch sind, sondern Rechtecke bilden.

Drei Masszahlen kennzeichnen einen Quader: die Länge l , die Breite b und die Höhe h .

Damit gilt für seine Oberfläche: $A =$
und für sein Volumen: $V =$



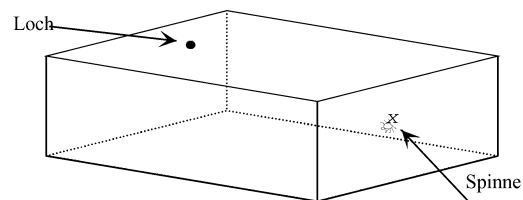
Aufgabe 1.2 Nehmen wir für die Kantenlängen eines solchen Quaders also allgemein die Werte l , b und h . Raumdiagonalen verbinden Eckpunkte, die nicht auf der gleichen Seitenfläche liegen.

- a) Welche Länge D besitzt dann die Raumdiagonale dieses Quaders? (2 Mal Pythagoras)
- b) Wieviele Raumdiagonalen besitzt ein Quader? Wie unterscheiden sich die Längen?

Aufgabe 1.3 Ein Quader habe eine Länge von 12 Einheiten, eine Breite von 8 Einheiten und eine Höhe von 4 Einheiten.

- a) Wieviele Würfel mit einer Kantenlänge von einer Einheit könnte man in diesem Quader unterbringen?
- b) Wieviele Würfel mit einer Kantenlänge von 2 Einheiten könnte man in diesem Quader unterbringen?

Aufgabe 1.4 Stelle Dir eine Spinne vor, welche eingesperrt ist in einer quaderförmigen Schachtel und an einer Innenwand sitzt. Plötzlich entdeckt sie an der gegenüberliegenden Wand ein Loch, durch welches sie entkommen könnte.



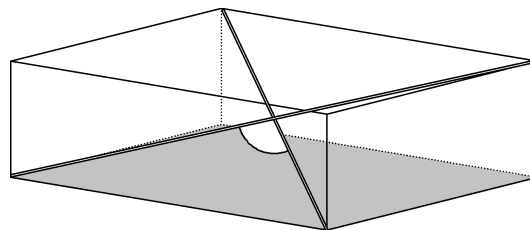
Nun möchte sie auf dem kürzesten Weg zu diesem Schlupfloch gelangen. Dabei kann sie natürlich Wände, Boden- und Deckfläche der Schachtel gleichermassen begehen. Wie könnte man den kürzesten Weg für ihre Flucht zum rettenden Loch finden?

Aufgabe 1.5 Ein Würfel ist ein Quader, bei dem alle Seitenlängen gleich gross sind. Ein Würfel besitzt eine Inkugel (welche alle sechs Seitenquadrate berührt) und eine Umkugel (deren Oberfläche alle acht Eckpunkte des Würfels enthält).

Bleiben wir nach wie vor bei einer Würfelkantenlänge der Grösse k . Berechne damit

- a) den Radius r der Inkugel:
- b) den Radius R der Umkugel:
- c) Besitzt ein Quader im allgemeinen eine Inkugel (welche also alle sechs Seitenflächen berührt)?
Wenn ja, wie gross ist dann ihr Radius r ?
- d) Besitzt ein Quader im allgemeinen eine Umkugel (auf welcher also alle acht Eckpunkte liegen)?
Wenn ja, wie gross ist dann ihr Radius R ?
- e) Für die drei Kantenmasse eines Quaders gelte $l > b > h$. Welchen Radius r besitzt dann eine möglichst grosse Kugel, welche in diesem Quader Platz finden könnte?

Aufgabe 1.6 “Trigonometrie” Wir wählen einen Quader mit einer Länge von 8 Einheiten, einer Breite von 5 Einheiten und einer Höhe von 3 Einheiten.



- a) Nun betrachten wir zwei Raumdiagonalen in diesem Quader. Diese schneiden sich in einem Punkt.

Welche Grösse besitzt der eingezeichnete Schnittwinkel β dieser beiden Raumdiagonalen?

$$\beta =$$

- b) Welche drei Winkel α , β und γ bildet dann eine Raumdiagonale mit den drei Quaderkanten an einem ihrer beiden Endpunkte?

Wähle die Winkelbezeichnung derart, dass gilt $\alpha > \beta > \gamma$.

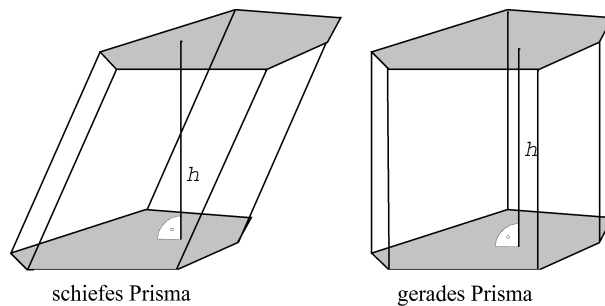
Aufgabe 1.7 “quadratische Gleichungen” Bei einem Quader ist eine Kante 3cm beziehungsweise 5cm kürzer als die anderen beiden Kanten. Die Oberfläche des Quaders beträgt 60cm^2 . Wie lang ist die kürzeste Kante?

2 Das Prisma

Beim Thema Prisma ist die Herleitung das Wichtigste. Sie erfolgt durch “Literaturstudium”. Es wird nur wenige Aufgaben geben.

Wird ein beliebiges n -Eck im Raum um eine gewisse Strecke aus der Ebene heraus parallel zu sich verschoben, dann beschreibt es dabei ein Prisma.

Erfolgt diese Verschiebung senkrecht zur Ebene des n -Ecks, dann sprechen wir geraden Prisma; sonst ist es ein schiefes Prisma.



Die Grundflächen (‘obere und untere’ Grenzfläche) eines Prismas sind also kongruente (deckungsgleiche) n -Ecke mit dem Flächeninhalt G , und der Mantel besteht aus n Rechtecken oder Parallelogrammen.

Als Höhe h eines Prismas bezeichnen wir stets den (senkrecht gemessenen!) Abstand zwischen den beiden parallelen Ebenen, in welchen Grund- und Deckfläche des Prismas liegen.

Satz 2.1 Für den Volumeninhalt des Prismas gilt:

$$V = G \cdot h$$

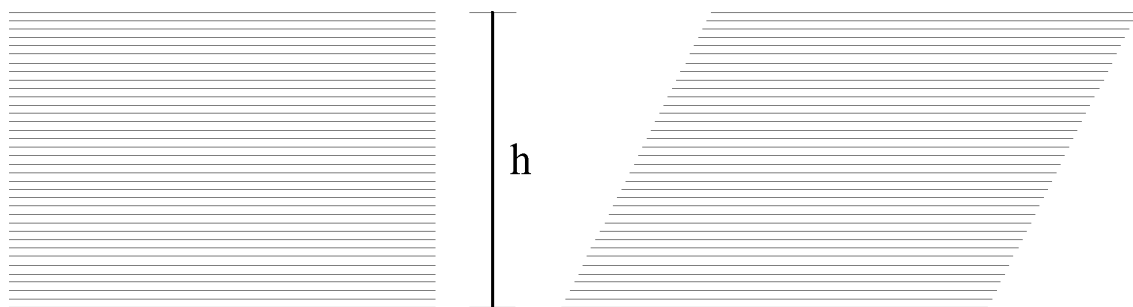
Beweis Kommt als Arbeitsauftrag im Literaturstudium (siehe unten).

Würfel und Quader stellen spezielle Fälle von Prismen dar.

Aufgabe 2.1 Ergänze:

- a) Der Quader ist ein gerades Prisma, bei welchem
- b) Der Würfel ist ein gerades Prisma, bei welchem

Dass bei der Volumenberechnung eines schiefen Prismas der senkrecht gemessene Abstand h zwischen den beiden Grundflächen massgebend ist, wollen wir hier plausibel machen: Wir denken uns zwei Stapel derselben 36 Spielkarten eines Jass-Spieles. Im einen Fall liegen die Karten senkrecht übereinander, im andern Fall sind sie verschoben. (Bild)

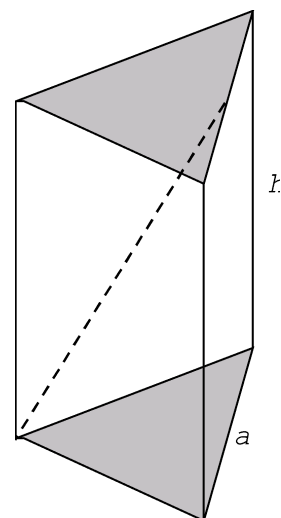


Beide Stapel umfassen die 36 Karten, und sie sind natürlich auch gleich hoch (bei senkrechter Vermessung). Im weiteren werden die beiden Stapel mit ihren 36 Spielkarten selbstverständlich auch dasselbe Gewicht haben, womit sie also volumengleich sein müssen. Schliesslich sind auch die Grundflächen der beiden Stapel kongruent, also insbesondere gleich gross. Gilt also für den linken Stapel (gerades Prisma) $V = A \cdot h$, dann muss dasselbe auch für den rechten Stapel (schiefes Prisma) gelten.

Lies Dir jetzt die allgemeine Herleitung der Formel $V = Gh$ in "Cornel Niederberger, Geometrie 3" durch. Studiere auch die Formeln zum Prisma in der Formelsammlung. Mache dir Notizen zu den Herleitungen. Sie gehören zum Klausurstoff.

Aufgabe 2.2 Wir betrachten hier ein spezielles gerades Prisma: seine Grundflächen bilden gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a , und die Höhe des Prismas betrage h .

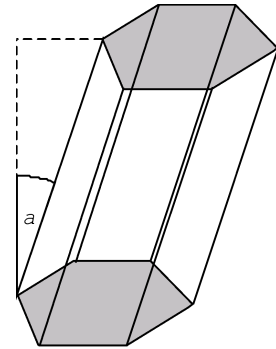
- a) Welches Volumen V besitzt dieses spezielle Prisma?
- b) Wie gross ist die Oberfläche A dieses Prismas?
- c) Wie weit ist ein Eckpunkt des Prismas entfernt von der Mitte der gegenüberliegenden Kante (siehe Abbildung):



Aufgabe 2.3 Wir wählen hier ein schiefes Prisma mit regulärer sechseckiger Grundfläche (zusammengesetzt aus sechs gleichseitigen Dreiecken):

Die Kanten der sechseckigen Grundflächen messen je 3,2 cm und alle sechs parallelen 'Seitenkanten' messen je 8 cm. Gegenüber einer Senkrechten auf der Grundfläche bilden die sechs 'Seitenkanten' Winkel der Grösse $\alpha = 28^\circ$ (siehe Abbildung).

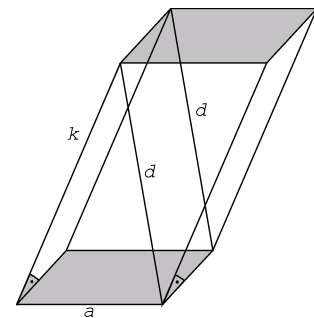
Berechne den Volumeninhalt V dieses Prismas.



Aufgabe 2.4 Hier wählen wir ein ein schiefes Prisma mit quadratischer Grundfläche:

Die Seiten der Grundflächen messen $a = 3,5$ cm, die 'Seitenkanten' haben Längen von $k = 11$ cm, und auch die eingezeichnete Diagonalen zweier Mantelvierecke messend $d = 11$ cm.

Beachte auch die eingezeichneten rechten Winkel am 'Boden' des Prismas!



a) Welcher Art sind die geometrischen Figuren, welche die sechs Bestandteile der Oberfläche dieses Prismas bilden?

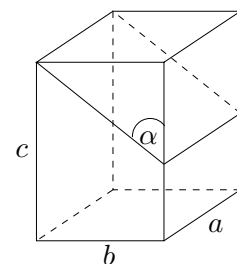
b) Berechne den Inhalt des Volumens V sowie die Grösse der Oberfläche A dieses Prismas. Runde jeweils auf 2 Dezimalstellen nach dem Komma.

c) Welcher Winkel liegt hier zwischen der Grundfläche und den 'Seitenkanten' dieses Prismas?

Beachte: Winkel sind eigentlich nur zwischen zwei sich schneidenden Geraden definiert. Wenn es um einen Winkel zwischen einer Ebene und einer sie schneidenden Geraden geht, ist damit der Winkel zwischen der betreffenden Geraden und ihrem Schatten in der betreffenden Ebene, wenn das Licht senkrecht auf diese Ebene fallen würde, gemeint.

d) Würde entlang der eingezeichneten Seitendiagonale d und senkrecht auf die entsprechende Seitenfläche das Prisma zerschnitten werden, dann würden zwei neue (gleiche) geometrische Körper entstehen.

Berechne die Grösse A der Oberfläche eines solchen Teilkörpers.



Aufgabe 2.5 Ein Quader wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Prismen zerlegt. Berechne das Volumen des unteren Prismas, wenn $a=6$ cm, $b=4$ cm, $c=8$ cm und $\alpha=50^\circ$

3 Die Pyramide

Das Kapitel "Pyramide" wird etwas ausführlicher behandelt. Pyramiden und Kegel sind die Objekte in der Stereometrie zu denen wir die gründlichsten Ueberlegungen anstellen werden.

Werden alle Punkte eines n -Ecks mit einem Punkt S verbunden, welcher nicht in derselben Ebene liegt wie das n -Eck, so entsteht eine Pyramide.

Das n -Eck bildet ihre Grundfläche, der Punkt S heisst **Spitze**. Die Mantelfläche der Pyramide setzt sich zusammen aus n Dreiecken mit dem gemeinsamen Eckpunkt in S .

Der (senkrecht gemessene!) Abstand der Pyramidenspitze S von der Ebene der Grundfläche heisst die Höhe der Pyramide.

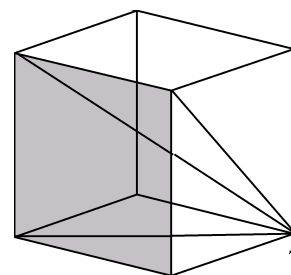
Bildet die Grundfläche ein reguläres (regelmässiges) n -Eck, und liegt die Pyramidenspitze S senkrecht über dem Mittelpunkt dieses regulären n -Ecks, dann sprechen wir von einer regelmässigen n -seitigen Pyramide.

Aufgabe 3.1 Ein Würfel lässt sich derart zerteilen, dass er zerfällt in sogenannte schiefe Pyramiden.

Eine solche schiefe Pyramide ist in den dargestellten Würfel hineingezeichnet.

Die Oberfläche einer solchen Pyramide besteht aus einer quadratischen Grundfläche (hier grau eingefärbt) sowie aus vier Dreiecken.

Die Pyramidenspitze liegt im Eckpunkt S des Würfels.



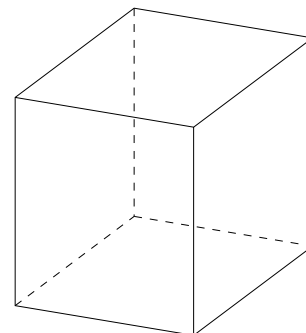
- a) Die vier Seitendreiecke sind zwar nicht alle gleich, aber alle vier haben etwas gemeinsam. Welches ist diese Gemeinsamkeit in der Form der vier Seitendreiecke dieser Pyramide?
Wiederum gehen wir aus von einer Würfelkantenlänge der Grösse k .
- b) Wie lang ist dann die Summe aller acht Kanten K einer solchen schiefen Pyramide?
- c) In wie viele solche schiefen Pyramiden lässt sich ein Würfel zerlegen? (Er zerfällt nämlich in eine bestimmte Anzahl gleicher schiefer Pyramiden!)
- d) Wie gross ist demnach der Inhalt (das Volumen) V einer solchen schiefen Pyramide in unserem Würfel?
- e) Wie gross ist die Oberfläche A einer solchen schiefen Pyramide in unserem Würfel?

Aufgabe 3.2 Stelle Dir in unserem Würfel eine gerade Pyramide vor, und zwar so, dass eines der Quadrate der Würfeloberfläche ihre Grundfläche bildet, und dass ihre Spitze im Würfelzentrum liegt.

Zeichne eine solche Pyramide in den untenstehenden Würfel möglichst anschaulich hinein.

Beachte dabei, dass sich die Lage des Würfelzentrums konstruieren lässt, indem die Raumdiagonalen im Würfel gezeichnet werden.

Welches Volumen V besitzt eine solche gerade Pyramide in einem Würfel der Kantenlänge k ?



Das Volumen einer Pyramide erweist sich bei beiden Übungsaufgaben als ein Drittel des Produktes aus Grundfläche G und Höhe h

Satz 3.1 Das Volumen einer beliebigen Pyramide mit Grundfläche G und Volumen h beträgt

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

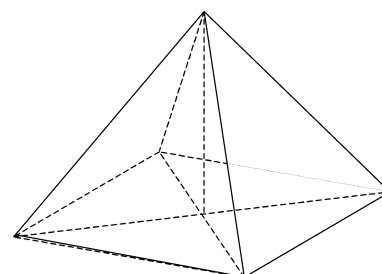
Beweis: Lies Dir jetzt die allgemeine Herleitung dieser Formel in "Cornel Niederberger, Geometrie 3" durch. Studiere auch die Formeln zum Pyramidenvolumen in der Formelsammlung. Mache Dir Notizen zu den Herleitungen. Sie gehören zum Klausurstoff.

Die berühmtesten Vertreter der pyramidenförmigen Körper bilden die regelmässigen 4-seitigen Pyramiden (oder einfacher die quadratischen Pyramiden), welche im Alten Ägypten und in Mittelamerika als Königsgräber oder als Kultstätten erbaut worden sind.

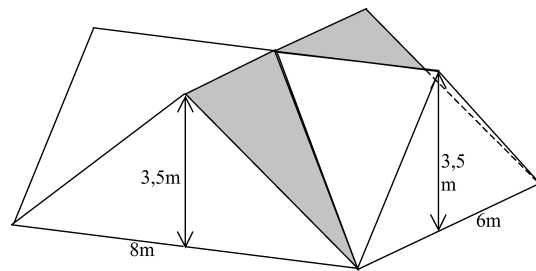
Einer dieser Vertreter wird in der nächsten Aufgabe untersucht:

Aufgabe 3.3 Eine quadratische Pyramide besitze eine Grundkantenlänge von 120 m und eine Höhe von 149 m.

- Welchen Flächeninhalt besitzt die Mantelfläche M dieser Pyramide (bestehend aus 4 Dreiecken)?
- Löse dieselbe Übung auch allgemein, nämlich mit der Grundkantenlänge k und mit der Höhe h .
- Unter welchem Winkel sind die Kanten gegenüber den Diagonalen der Grundfläche geneigt? (mit $k = 120\text{m}$ und $h = 149\text{m}$)
- Wie weit ist bei obiger quadratischer Pyramide (der Mittelpunkt des Grundflächenquadrates entfernt von einer der vier nach oben verlaufenden Kanten der Mantelfläche? (Beachte, dass selbstverständlich die 'kürzeste Entfernung' gemeint ist!)



Aufgabe 3.4 Die Darstellung rechts zeigt ein etwas komplizierteres Hausdach oder zwei sich schneidende gerade Prismen. Wie gross ist das Volumen V dieses Körpers?

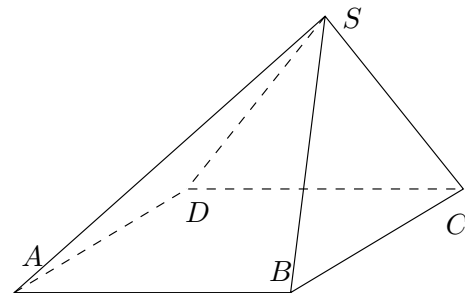


Aufgabe 3.5 "Reguläre Polyeder" Polyeder sind Körper, die von Vielecken (z.B. Dreiecken, Vierecken) begrenzt werden. Reguläre Polyeder sind Polyeder, bei denen alle Seitenflächen kongruent sind und von jeder Ecke gleich viele Kanten ausgehen. Es gibt fünf verschiedene reguläre Polyeder: (Formelsammlung).

Den Hexaeder haben wir bereits als Würfel kennengelernt. Leite die Volumenformel für Tetraeder und Oktaeder aus der Volumenformel für Pyramiden her.

Aufgabe 3.6 Eine schiefe Pyramide hat eine quadratische Grundfläche $ABCD$ mit $AB = CD = 4\text{cm}$ und die Seitenkanten $AS = DS = 8\text{cm}$, $BS = CS = 6\text{cm}$. Berechne

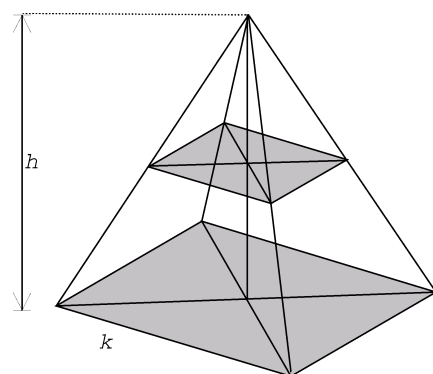
- die Winkel CBS , SBA , BAS , SAD .
- die Höhen der Seitenflächen.
- die Oberfläche.
- die Höhe und das Volumen



Aufgabe 3.7 Eine quadratische Pyramide wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche entzwei geschnitten.

Der untere Teil wird als **Pyramidenstumpf** bezeichnet. Die vollständige Pyramide besitzt natürlich ein Volumen der Grösse $V = k^2 h / 3$.

Wie gross aber ist das Volumen der oben abgeschnittenen kleineren quadratischen Pyramide?

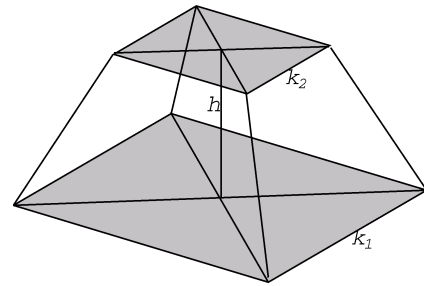


Ein Pyramidenstumpf lässt sich auch betrachten, wenn nicht unbedingt in halber Höhe geschnitten wird.

Sichtbar ist dann nicht mehr die ursprüngliche Gesamthöhe, sondern nur die verbliebene Höhe h und die Seitenlängen k_1 und k_2 . Die Formeln für Volumen und Oberfläche finden sich hier. Handelt es sich nicht einmal um quadratische Pyramidenstümpfe, so finden sich die Formeln in der Formelsammlung.

$$V = \frac{h}{3(k_1 - k_2)} (k_1^3 - k_2^3)$$

$$A = k_1^2 + k_2^2 + (k_1 k_2) \sqrt{4h^2 + (k_1 - k_2)^2}$$

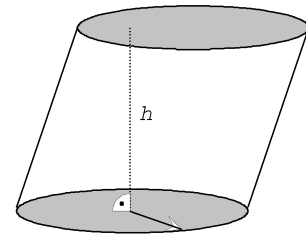
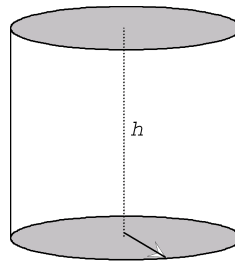


4 Der Zylinder

Ein ganz kurzes Kapitel mit einem vergleichsweise erhaltensamen Kapiteltest.

Wird eine Kreisfläche im Raum um eine gewisse Strecke aus der Ebene heraus parallel zu sich verschoben, dann beschreibt sie dabei einen Zylinder.

Erfolgt die Verschiebung senkrecht zur Ebene des Kreises, dann ergibt sich ein gerader Zylinder; sonst ein schiefer Zylinder (s. Abb.).



Als Höhe h eines Zylinders bezeichnet wird der (stets senkrecht gemessene!) Abstand zwischen den beiden Kreisflächen, welche den Zylinder begrenzen, bezeichnet.

Wie bei Prismen lässt sich auch das Zylindervolumen berechnen als das Produkt aus Grundfläche und Höhe, also $V = Gh$

Weil die Grundfläche hier allerdings ein Kreis ist, und weil für die Kreisfläche gilt: $G = r^2 \cdot \pi$, so folgt für das Zylindervolumen:

Satz 4.1 Das Volumen eines Zylinders beträgt

$$V = \pi r^2 h$$

Aufgabe 4.1 Wie gross ist die gesamte Oberfläche A eines geraden Zylinders mit dem Radius r und mit der Höhe h ?

Aufgabe 4.2 Rotiert ein Rechteck um eine seiner beiden Symmetrieachsen, dann beschreibt es einen Zylinder.

Berechne das Volumen der beiden möglichen Zylinder, welche von einem Rechteck von 8 cm Länge und 5 cm Breite auf diese Weise erzeugt werden können.

Weise nach, dass diese beiden Volumina nur dann gleich gross sein können, wenn das erzeugende Rechteck quadratisch ist.

5 Der Kegel

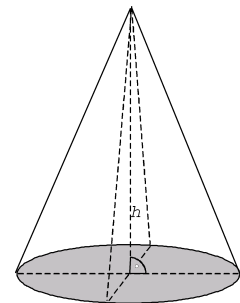
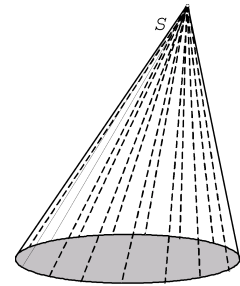
“Kreise sind Vielecke mit unendlich vielen Ecken.” Werden Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke mit jeweils gleichen Seitenlängen angeschaut, so werden die Körper immer runder. So gesehen ist der Zylinder ein Prisma mit runder Grundfläche. Genauso ist ein Kegel eine Pyramide mit runder Grundfläche:

Werden alle Punkte einer Kreisfläche mit einem Punkt S , welcher ausserhalb der Ebene dieser Kreisfläche liegt, verbunden, dann entsteht ein Kegel.

Als Höhe h wird beim Kegel (wie schon bei der Pyramide) den senkrecht gemessenen Abstand der Kegelspitze S von der Ebene der Grundkreisfläche bezeichnet.

Liegt die Kegelspitze S senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises, dann handelt es sich speziell um einen geraden Kegel. Ansonsten ist es ein schiefer Kegel.

Die Lichtstrahlen beispielsweise, welche von einem Scheinwerfer an eine zur Strahlungsrichtung senkrechte Wand ‘geworfen’ werden, bilden einen geraden Kegel.



Ein Kegel kann beliebig genau angenähert werden, durch Pyramiden mit hinreichend grosser Eckenzahl n ihrer Grundflächen. Daher gilt auch für Kegel die Volumenformel der Pyramiden, wobei die Grundfläche ein Kreis ist:

Satz 5.1 Für einen Kegel gilt

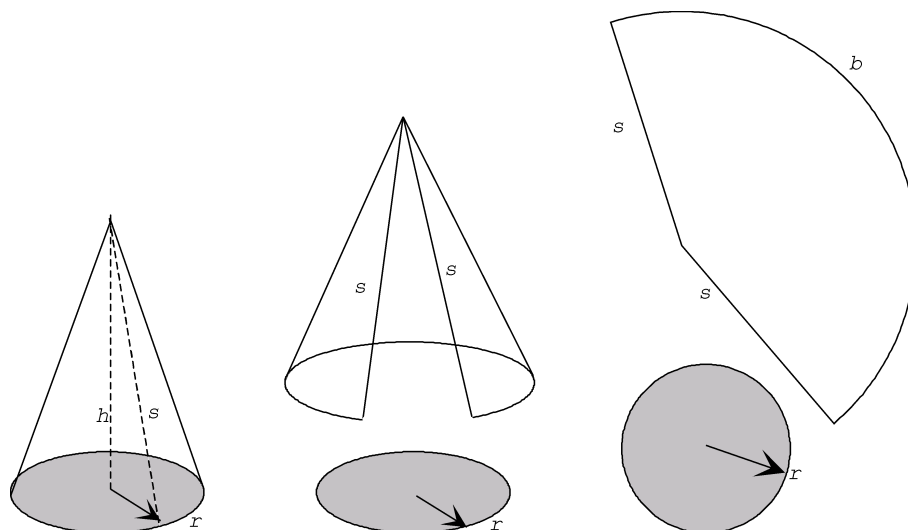
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Aufgabe 5.1

- Ein trichterförmiges Gefäss (somit also mit der Form eines geraden Kegels dessen Spitze unten liegt) soll einen Liter Flüssigkeit fassen. Sein Durchmesser (der Grundfläche) misst 24 cm. Wie hoch muss dieser Trichter sein?
- Bis zu welcher Höhe muss das Glas gefüllt werden, damit es einen halben Liter Flüssigkeit enthält?

Die Oberfläche eines *geraden* Kegels zerfällt in eine Kreisfläche (Grundkreis) und in den Kegelmantel.

Wird der Kegelmantel in eine Ebene ausgebreitet, dann besitzt er die Form eines Kreissektors:



Der Kreissektor, welcher vom Kegelmantel beim Abwickeln gebildet wird, hat den Radius s , für welchen gilt: $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ (siehe die linke Abbildung und bedenke den Satz von Pythagoras!)

und die Bogenlänge b , für welche gilt: $b = 2\pi r$ (denn die Länge dieses Bogens muss mit der Länge der Peripherie des Grundkreises übereinstimmen!).

Die Fläche des entstandenen Kreissektors steht zur Fläche des gesamten Kreises somit im selben Verhältnis, wie die Bogenlänge b zum ganzen Kreisumfang. Also gilt mit der Sektorfläche M die Verhältnisgleichung:

$$M : (\pi s^2) = b : (2\pi s)$$

Aufgabe 5.2 Löse die obige Proportion (Verhältnisgleichung) auf nach der Mantelfläche M und ersetze danach die Längen s und b gemäss obigen Ueberlegungen durch die Grössen r und h .

Aufgabe 5.3 Wie gross ist die gesamte Oberfläche eines geraden Kegels mit dem Grundkreisradius $r = 15,2$ cm und der Höhe $h = 75$ cm ?

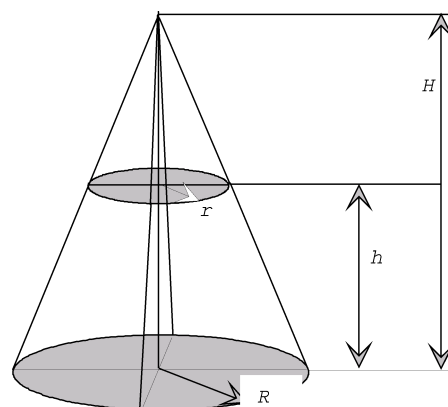
Wird ein gerader Kegel parallel zu seiner Grundfläche abgeschnitten, dann entsteht ein gerader Kegelstumpf.

Wir bezeichnen den Grundkreisradius des Kegelstumpfs mit R und den Radius seines Deckkreises mit r .

Die Höhe des Kegelstumpfes sei h , während die Höhe des ungeschnittenen Kegels mit H bezeichnet wird.

Aufgrund des 2. Strahlensatzes gilt die Verhältnisgleichung:

$$\frac{H}{R} = \frac{H - h}{r} \quad (1)$$



Damit lässt sich die vierte Grösse (H, h, R, r) berechnen, wenn die übrigen drei Grössen bekannt sind.

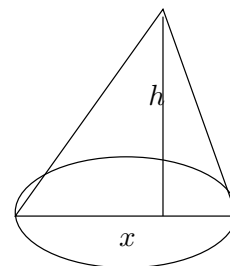
Zur Berechnung des Volumens eines Kegelstumpfes wird ausgegangen von der Vorstellung, dass von einem vollständigen Kegel (Grundkreisradius R , Höhe H) ein kleinerer Kegel (Grundkreisradius r , Höhe $H - h$) abgeschnitten worden sei. Daraus ergibt sich für den Kegelstumpf:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H - h) = \frac{\pi}{3} (R^2 H - r^2 (H - h))$$

In der Formelsammlung steht auch hierzu eine alternative Formel, die bei Aufgaben sehr nützlich ist.

Aufgabe 5.4 Berechne das Volumen V und Oberfläche A des Kegelstumpfes bei folgenden Angaben: $r = 0,85\text{m}$; $h = 52\text{cm}$; $H = 1,2\text{m}$

Aufgabe 5.5 Bei einem schiefen Kegel ist $r = 4\text{cm}$, die längste Mantellinie $s_1 = 9\text{cm}$, die kürzeste $s_2 = 7\text{cm}$. Berechne den Rauminhalt des Kegels. *Tipp: gesucht ist zunächst die Höhe h . Längste und kürzeste Mantellinie liegen sich gegenüber. Der Fusspunkt der Höhe h liegt auf einem Durchmesser, der die Mantellinien verbindet.*



Aufgabe 5.6 Bei einem Kegel ist die Mantelfläche doppelt so gross wie die Grundfläche. Wie hoch ist er, wenn das Volumen 100cm^3 ist?

Aufgabe 5.7 Ein Viertelkreis mit Radius 1cm wird zu einem geraden Kegel gebogen. Berechne die Oberfläche und das Kegelvolumen.

Aufgabe 5.8 Ein Blumentopf hat die Gestalt eines Kegelstumpfs. Er hat unten eine Innenweite von 15cm und oben eine Innenweite von 20cm . Die Höhe ohne Boden beträgt 25cm . Wie viele solcher Blumentöpfe lassen sich mit 1m^3 Erde füllen?

6 Der Satz von Cavalieri

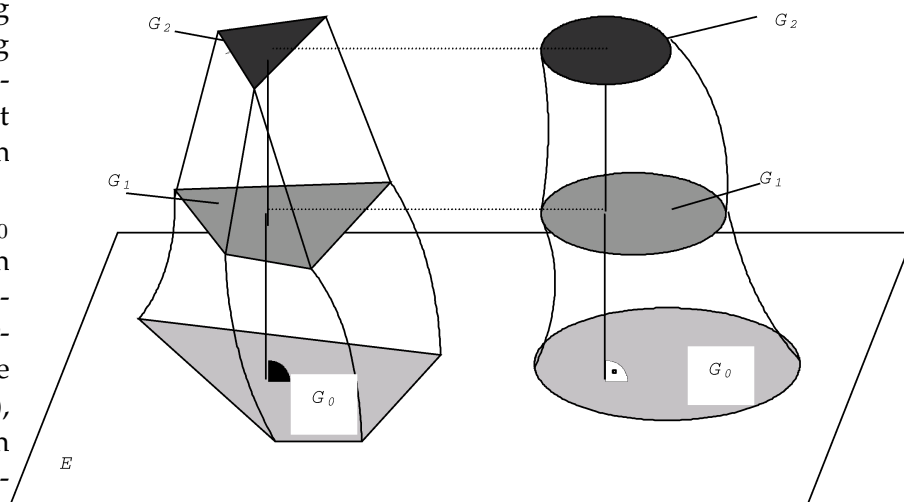
Um die Berechnung von Volumina gewisser Körper verstehen zu können, ist ein Satz des italienischen Mathematikers Bonaventura Cavalieri (1598? - 1647) von grossem Nutzen. Wir verfügen allerdings noch nicht über die notwendigen mathematischen Begriffe und Hilfsmittel, um diesen Satz auch beweisen zu können.

Cavalieri konnte den folgenden Satz nachweisen:

Satz 6.1 Schneidet eine Ebene E aus zwei Körpern Flächen von gleichem Flächeninhalt, und gilt dies auch für jede andere zu E parallele Ebene, dann besitzen die beiden Körper auch dasselbe Volumen.

Die Darstellung zeigt zwei völlig unterschiedlich geformte Körper mit einer besonderen Eigenschaft:

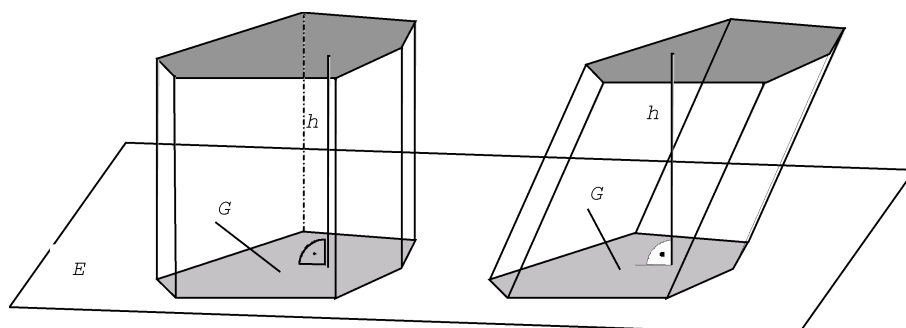
Eine Ebene E_0 schneidet die beiden Körper, und es entstehen zwar unterschiedlich geformte Schnittflächen (G_0), aber beide besitzen denselben Flächeninhalt.



Wird die Ebene E_0 parallel verschoben, dann entstehen in jeder Lage wiederum Flächen gleicher Grösse (G_1 resp. G_2).

Gilt dies für jede mögliche Lage dieser parallelen Schnittebenen, dann sind die Volumina der beiden Körper auch gleich gross.

So ganz neu ist dieser Satz eigentlich nicht. Betrachten wir die Formeln zu Berechnung der Volumina bei geraden und bei schiefen Prismen und Pyramiden so ergeben sich die Formeln für die schiefen Körper aus jenen für die geraden Körper eben aus diesem Satz von Cavalieri:



Stellen wir das gerade und das schiefe Prisma auf dieselbe Ebene E , und wird diese Ebene E parallel nach oben geschoben, so entstehen in jeder Lage mit beiden Körpern dieselben Schnittflächen (hier sind sie sogar kongruent!). Also sind das schiefe und das gerade Prisma bei gleicher Höhe h auch volumengleich.

So wirklich bedeutungsvoll wird der Satz von Cavalieri dann, wenn wir versuchen, das Volumen einer Kugel zu berechnen.

Zu diesem Kapitel gibt es keinen Test.

7 Die Kugel

Die Kugel kann definiert werden als die Menge aller Punkte in einem Raum, welche von einem gegebenen Punkt (Zentrum) einen Abstand aufweisen, welcher höchstens gleich einer gegebenen positiven Grösse (= Radius R) ist.

Werden bloss diejenigen Punkte im Raum betrachtet, deren Abstand vom Zentrum Z genau gleich dem gegebenen Radius ist, ergibt sich die Kugeloberfläche oder die Kugelsphäre - oder oft auch verkürzt die Sphäre.

Ähnlich wie der Kreis in der Ebene, ist die Kugel im Raum bereits dann eindeutig definiert, wenn eine einzige Grösse - etwa ihr Radius R - gegeben ist.

Dies hängt auch bei der Kugel zusammen mit ihrer vollendeten Einfachheit und Vielfalt an Symmetrie.

Mit Hilfe des Satzes von Cavalieri lässt sich die Volumenformel der Kugel herleiten:

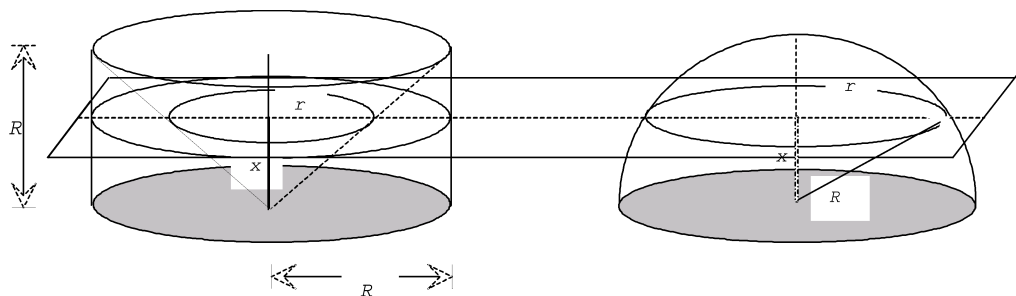
Zunächst berechnen wir das Volumen eines Zylinders mit einer kegelförmigen Aushöhlung. Radius und Höhe des Zylinders seien dabei gleich gross, nämlich von der Grösse R (s. Abbildung) unten:

Dieser ausgehöhlte Zylinder besitzt das Volumen

$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = R^2 \pi R - \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi R$$

$$\text{also } V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Vergleichen wir nun diesen ausgehöhlten Zylinder mit einer Halbkugel mit dem Radius R :



In einem gewissen Abstand x von der Grundfläche schneide nun eine zur Grundfläche parallele Ebene E die beiden Körper. Beim ausgehöhlten Zylinder entsteht als Schnittfläche ein Kreisring, dessen äusserer Radius $= R$ misst und für dessen inneren Radius r nach Strahlensatz gilt: $x : r = R : R$ woraus folgt $r = x$.

Somit gilt für den Flächeninhalt dieses Kreisringes:

$$A_{KR} = R^2 \pi - x^2 \pi = \pi(R^2 - x^2).$$

Beim Schnitt mit der Halbkugel entsteht ein Kreis, für dessen Radius r nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$r^2 = R^2 - x^2$. Somit beträgt der Flächeninhalt des Schnittkreises mit der Halbkugel:

$$A_{HK} = r^2 \pi = \pi(R^2 - x^2)$$

Ein Vergleich der Flächeninhalte A_{KR} und A_{HK} der beiden Schnittfiguren zeigt also, dass sie beide genau gleich gross sind, und zwar unabhängig vom gewählten Grundkreisabstand x .

Damit ist die Voraussetzung für den Satz von Cavalieri erfüllt: Der ausgehöhlte Zylinder und die Halbkugel müssen somit das selbe Volumen aufweisen! Für die Halbkugel mit dem Radius R gilt also: $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Daraus folgt für das Volumen einer ganzen Kugel $V = 2 \cdot V_{HK}$, also:

Satz 7.1 Das Volumen einer Kugel mit Radius R beträgt

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Zur Herleitung der Formel für die Kugeloberfläche O denken wir uns die Kugel mit dem Radius R näherungs-weise zerlegt in eine sehr grosse Anzahl von Pyramiden:

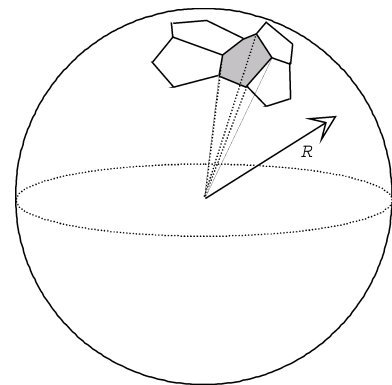
Jede Pyramide besitzt die Höhe $h = R$. Für die Grundfläche der i -ten Pyramide setzen wir vorübergehend das Symbol A_i . Damit gilt für das Volumen der i -ten Pyramide:

$$V_i = \frac{1}{3}A_i R$$

Denken wir uns die Kugel vollständig ausgefüllt mit n solchen Pyramiden, dann gilt für die Summe ihrer Volumina:

$$V = 1/3A_1R + 1/3A_2R + \dots + 1/3A_nR, \text{ also}$$

$$V = \frac{1}{3}R(A_1 + A_2 + \dots A_n) \quad (2)$$



Nun wird beachtet, dass bei sehr vielen Pyramiden für die Summe ihrer Grundflächen (siehe obige Klammer) gilt:

$$A_1 + A_2 + \dots A_n \cong O \text{ (= Kugeloberfläche)}$$

und dass für das gesamte Kugelvolumen bekanntlich gilt: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Dann folgt mit Gleichung 2:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}RO$$

und damit nach Multiplikation mit 3 und Division durch R :

Satz 7.2 Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R beträgt

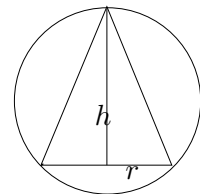
$$O = 4\pi R^2$$

Aufgabe 7.1 Eine Hohlkugel aus Glas besitzt einen äusseren Durchmesser von 12 cm und eine Wandstärke von 1,5 mm. Das Glas besitzt ein Gewicht von $2,6 \text{ g pro cm}^3$. Wie schwer ist diese gläserne Hohlkugel?

Aufgabe 7.2 Eine Bleikugel mit einem Durchmesser von 8,2 cm wird eingeschmolzen, und daraus werden 20'000 kleine Bleikügelchen gegossen.

- a) Wie gross ist der Durchmesser eines solchen Bleikügelchens?
- b) Wieviel mal grösser ist die gesamte Oberfläche all dieser Bleikügelchen als die Oberfläche der ursprünglichen Bleikugel? (Rundung auf eine ganze Zahl)

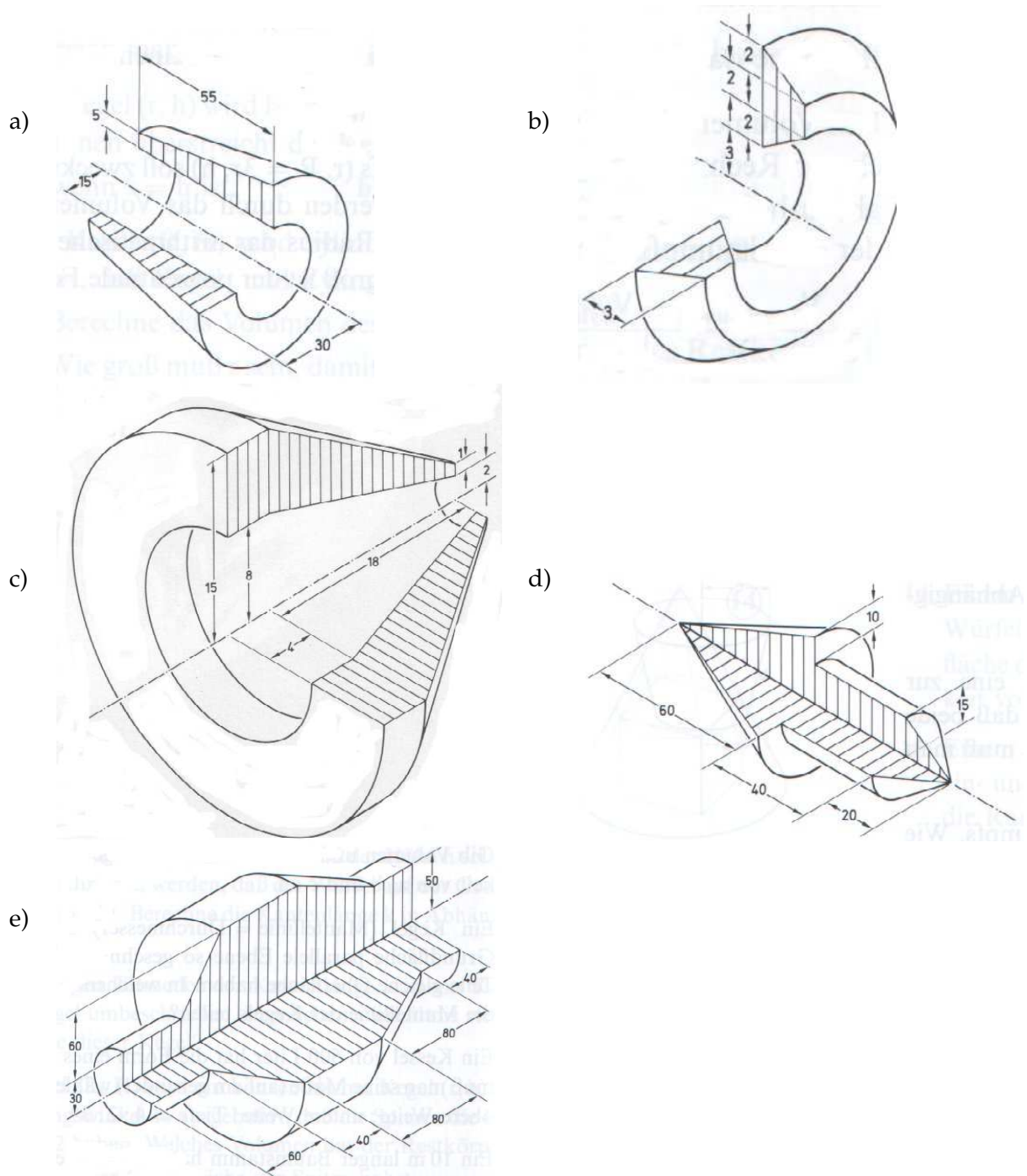
Aufgabe 7.3 In einer Kugel mit Radius $R = 4 \text{ cm}$ ist ein gerader Kegel einbeschrieben, dessen Höhe doppelt so lang ist wie der Grundkreisradius. Wie gross ist die Differenz der beiden Volumina dieser Körper? (Tipp: Fassbogenkreis oder Zentriwinkelsatz)



A Drehkörper

Aufgabe A.1 Die Bilder zeigen Schnittbilder von Drehkörpern. Die Schnittebenen (schraffiert) schneiden sich rechtwinklig in der Symmetrieachse des Drehkörpers.

Berechne Volumen V und Oberfläche O der Drehkörper. Berechne ausserdem den Inhalt A_E der Fläche, die den Drehkörper erzeugt, wenn sie sich um die Symmetrieachse (gepunktstrichtelt) dreht.



Aufgabe A.2 Ein regelmässiges Sechseck hat eine Seitenlänge von 12cm. Dieses Sechseck rotiert nun auf zwei verschiedene Arten. Berechne jeweils das Volumen.

- a) Rotation um eine Achse durch die Mitte zweier Gegenseiten.
- b) Rotation um eine Achse durch zwei gegenüberliegende Seiten.

B Arbeitsaufträge

Aufgabe B.1 Arbeite das Arbeitsblatt zum Eulerschen Polyedersatz durch.

Aufgabe B.2 Finde im Internet Literatur zu platonischen Körpern und erstelle eine Linkliste für die Klasse. Berücksichtige auch historische und metaphysische Bezüge.

Aufgabe B.3 Arbeite das Arbeitsblatt zur Volumenberechnung des Kegels durch.

C Lösungen

A. 1.1: $S = 2(lb + lh + bh)$, $V = lbh$.

A. 1.2: a) $D = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ b) 4 Raumdiagonalen gleicher Länge

A. 1.3: a) 384 Einheitswürfel b) 48 Würfel der Kantenlänge 2

A. 1.4: Auf der Abwicklung des Quaders wird der Standort der Spinne geradlinig mit dem Loch verbunden.

A. 1.5: a) $r = k/2 = 0.5k$ b) $R = \sqrt{3}k/2 \cong 0.866k$ c) keine Inkugel d) Umkugel mit $R = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}/2$ e) $r = h/2$

A. 1.6: a) $\beta = 107.83^\circ$ b) $\alpha = 72.36^\circ$, $\beta = 59.66^\circ$, $\gamma = 36.09^\circ$ **A. 1.7:** 0,81cm

A. 2.1: Der Quader ist ein gerades Prisma, bei welchem die Grundfläche rechteckig ist.

Der Würfel ist ein gerades Prisma, bei welchem die Grundfläche quadratisch ist (Seitenlänge s), und bei welchem für die Höhe h gilt: $h = s$.

A. 2.2: a) $V = \sqrt{3}/4 \cdot a^2 h$ b) $A = \sqrt{3}/2 \cdot a^2 + 3ah$ c) $d = \sqrt{h^2 + 3/4 a^2} = \sqrt{4h^2 + 3a^2}/2$

A. 2.3: $V \cong 187,92 \text{ cm}^3$

A. 2.4: a) 2 Quadrate, 2 Rechtecke und 2 Parallelogramme b) $V \cong 133,03 \text{ cm}^3$; $A \cong 177,52 \text{ cm}^2$ c) $\varphi \cong 80.85^\circ$ d) $A \cong 127,26 \text{ cm}^2$ **A. 2.5:** 151.72 cm^3

A. 3.1: a) Alle vier Seitendreiecke sind rechtwinklig. b) $K = (5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})k \cong 9.56k$ c) 3 gleiche schiefe Pyramiden d) $V = k^3/3$ e) $A = (2 + \sqrt{2})k^2 \cong 3.41k^2$ **A. 3.2:** $V = k^3/6$

A. 3.3: a) $A \cong 38'550,46 \text{ m}^2$ b) $A = k\sqrt{4h^2 + k^2}$ c) 60.34° d) $d \cong 73,73 \text{ m}$ **A. 3.4:** $V = 112 \text{ m}^3$

A. 3.5: Formelsammlung

A. 3.6: a) 70.5° , 104.5° , 46.6° 75.5° b) $h_{AB} = h_{CD} = 5.81 \text{ cm}$, $h_{BC} = 5.66 \text{ cm}$, $h_{AD} = 7.75 \text{ cm}$ c) $S = 66.04 \text{ cm}^2$ d) $h = 5.45 \text{ cm}$, $V = 29.09 \text{ cm}^3$

A. 3.7: $V = k^2 h/24$

A. 4.1: $A = 2\pi r \cdot (r + h)$ **A. 4.2:** $V_1 \cong 251,33 \text{ cm}^3$; $V_2 \cong 157,08 \text{ cm}^3$

A. 5.1: a) $h \cong 6,63 \text{ cm}$ b) 5.26 cm **A. 5.2:** $A = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ **A. 5.3:** $A \cong 4'380,06 \text{ cm}^2$ **A. 5.4:** $V \cong 2,31 \text{ m}^3$, $A \cong 15,48 \text{ m}^2$

A. 5.5: $V = 112.4 \text{ cm}^3$ **A. 5.6:** $h = 6.59 \text{ cm}$ **A. 5.7:** $V = 0.063 \text{ cm}^3$, $A = 0.982 \text{ cm}^2$ **A. 5.8:** 165

A. 7.1: 172,06 g **A. 7.2:** a) $d \cong 3,02 \text{ mm}$ b) ca. 27 mal grösser **A. 7.3:** $\Delta V \cong 199,45 \text{ cm}^3$

A. A.1: a) $V = 70554.94$, $O = 16635$ und $A_E = 550$ b) $V = 452.39$, $O = 573.45$ und $A_E = 12$ c) $V = 5698.86$, $O = 2918.97$ und $A_E = 100$ d) $V = 72256.62$, $O = 11309.7$ und $A_E = 1500$ e) $V = 42746604.4$, $O = 146320.63$ und $A_E = 19000$